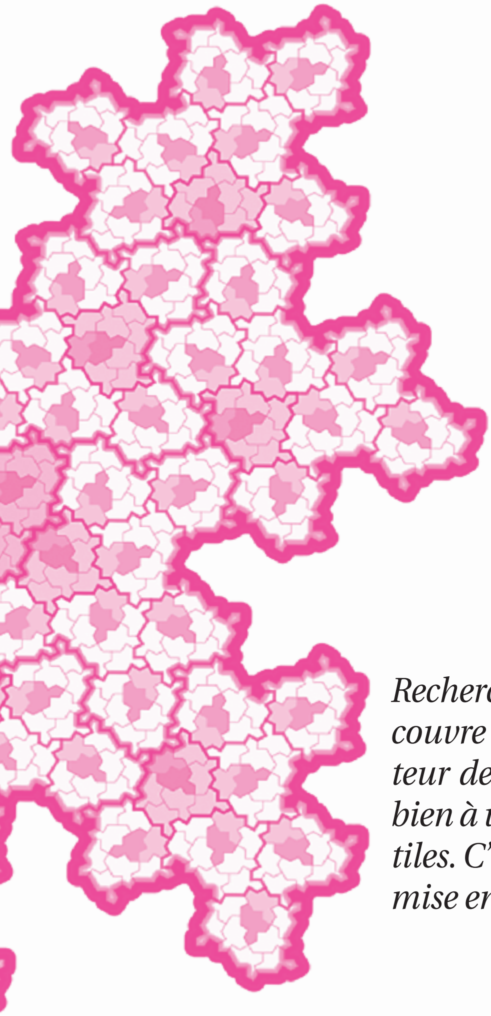


La tuile qu'on n'attendait plus

Recherchée depuis plus d'un demi-siècle, une pièce de puzzle unique, qui couvre le plan sans répétition, a été découverte récemment par un amateur de mathématiques britannique. La preuve que cette tuile aboutit bien à un pavage dit « apériodique » met en jeu des mathématiques subtiles. C'est en fait toute une famille de tuiles apériodiques qui a ainsi été mise en évidence. Les spécialistes du domaine saluent la performance.

D. SMITH, J.S. MYERS, C.S. KAPLAN, C. GOODMAN-STRAUSS

◀ *Pavage partiel du plan avec la tuile en forme de spectre. Le regroupement de deux tuiles en une forme symétrique et des règles de substitution ont aidé à prouver que le pavage était apériodique.*

Pour fabriquer un puzzle, on prend une surface que l'on découpe en morceaux, de sorte que le recouvrement ultérieur de la surface par les pièces est garanti. La question inverse est moins évidente : pour un jeu de pièces données, à quelles conditions couvrent-elles le plan ? C'est le problème général du pavage. Paver le plan de manière périodique est assez facile : des pièces carrées toutes identiques, par exemple, recouvrent complètement le plan. On connaît des collections de pavages périodiques avec des motifs variés, à l'aide de polygones ou d'autres formes dont les qualités décoratives se retrouvent partout, dans les pavages de l'Égypte ancienne, les mosaïques islamiques et jusque dans le carrelage de votre salle de bains. L'obtention d'un pavage apériodique – où il n'existe pas de symétrie par translation – nécessite à l'inverse des constructions assez techniques et avec plusieurs pièces. Et imaginer que l'on puisse le faire avec une seule pièce – une unique tuile – paraissait hors de portée. C'était devenu le graal du domaine. Les spécialistes avaient nommé cette pièce hypothétique « ein Stein » (une pierre en allemand, avec un calembour sur le nom du célèbre physicien allemand). Dans la communauté mathématique, même si elle était recherchée activement, nombre de spécialistes pensaient même qu'une telle pièce n'existait pas.

Coup de théâtre au printemps 2022 : un article exhibant une telle pièce apparaît sur le serveur de prépublication ArXiv ; elle est en forme de chapeau. Les spécialistes des pavages s'enflamment : tout le monde analyse le papier qui est vite jugé pertinent (1). Toutefois, si vous voulez carreler votre salle de bains de manière apériodique, dans l'absolu, deux tuiles différentes

Le Britannique David Smith, qui a découvert la fameuse tuile apériodique, est un technicien de l'imprimerie à la retraite, amateur de jeux mathématiques, de puzzles et de formes fractales

restent indispensables, puisque ce pavage nécessite non seulement des translations, mais aussi une symétrie. Autrement dit, c'est la pièce et la même pièce retournée qui pavent le plan, et formellement pas une pièce unique – même si les mathématiciens disent qu'il s'agit d'une pièce « à la symétrie près ». Deux mois plus tard, nouveau coup de théâtre, puisque la même équipe annonce avoir corrigé ce petit défaut : ils ont bien découvert une tuile unique couvrant le plan de façon apériodique (2).

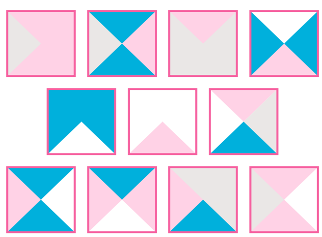
Ce qui surprend le plus, c'est que la pièce en question, que les auteurs ont baptisée « spectre », est assez simple. *« Cette simplicité et le fait que cette "tuile" n'ait pas été trouvée auparavant témoignent de notre compréhension encore très partielle de la naissance de l'apériodicité dans le plan »*, confie Thomas Fernique, chercheur CNRS au Laboratoire d'informatique de Paris-Nord, à Villetaneuse. En d'autres termes, comment peut-on, à partir de règles locales, forcer un recouvrement apériodique du plan ?

Les pavages fascinent, car ils représentent un réservoir inépuisable de questions mathématiques. C'est par ailleurs l'un des rares domaines des mathématiques – sinon le seul – où, sans besoin d'un bagage théorique, amateurs et artistes se sont illustrés, en découvrant de nouveaux pavages avec des propriétés intéressantes. Cette percée l'illustre une nouvelle fois, puisque le Britannique David Smith, qui a découvert la fameuse tuile apériodique, est un technicien de l'imprimerie à la retraite, amateur de jeux mathématiques, de puzzles et de formes fractales.

Qu'est-ce qu'un pavage bidimensionnel ? C'est un recouvrement – sans trou – du plan euclidien avec une ou plusieurs pièces. Et c'est un recouvrement qui va jusqu'à l'infini, comme un puzzle que l'on imagine se poursuivre dans toutes les directions ! Si l'on essaye de paver le plan par translation d'une seule pièce utilisable autant de fois que l'on veut, alors de tels pavages sont possibles, à condition que la pièce soit un pseudo-hexagone (un hexagone qui peut être déformé) ; un tel pavage est périodique ou semi-périodique (invariant par certaines translations). En d'autres termes, on obtient un pavage dont le motif se répète à l'infini (les mathématiciens disent que le pavage admet une

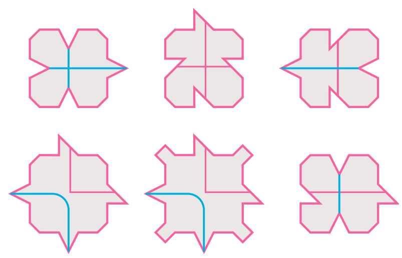
RÉDUIRE LE NOMBRE DE PIÈCES

À partir des années 1960, on découvre des ensembles de tuiles qui pavent le plan euclidien de manière apériodique. De tels pavages sont composés d'une unité fondamentale qui se répète à l'infini sans symétrie de translation. Au fil des ans, le nombre de pièces nécessaires s'est réduit, jusqu'à une unique tuile, mais qui n'est pas d'un seul tenant. On a représenté ici quelques-uns de ces ensembles parmi les dizaines qui ont été mis en évidence au fil du temps.



1966-2015 TUILES DE WANG

Les tuiles de Wang s'assemblent comme des dominos. En 1966, il en fallait 20 426 différentes pour obtenir un pavage apériodique. En 2015, Emmanuel Jeandel et Michaël Rao trouvent cet ensemble minimal de onze tuiles.



1969 TUILES DE ROBINSON

Cet ensemble de six tuiles pave le plan de manière apériodique, en créant une hiérarchie infinie de réseaux carrés.

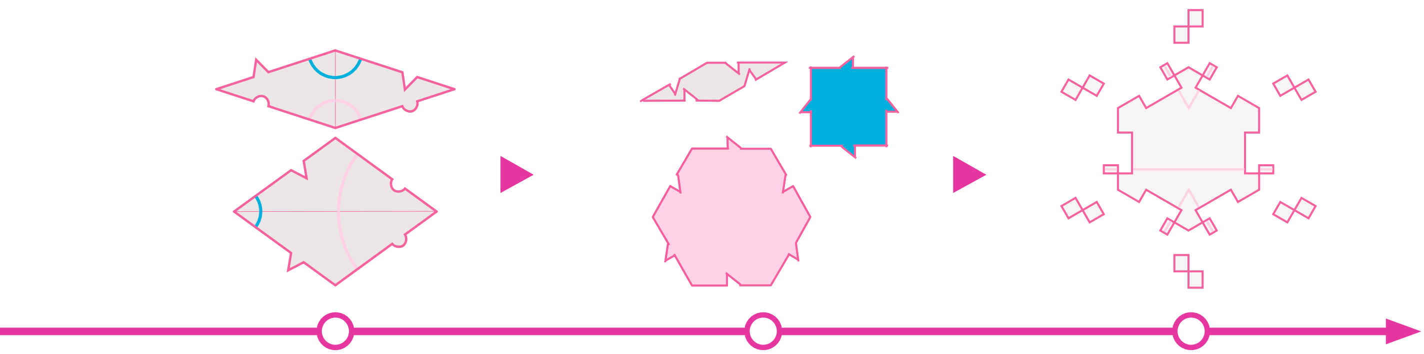
SOURCE : E. JEANDEL ET M. RAO, *ADV. COMB.*, DOI : 10.19086/AIC.18614, 2021

isométrie par translation). Ce résultat de 1990 est dû aux mathématiciens français Danièle Beauquier et Maurice Nivat (3). « *En autorisant seulement des translations, le pavage obtenu est forcément un pseudo-hexagone, et c'est très loin de faire quelque chose de compliqué* », explique Emmanuel Jeandel, professeur à l'université de Lorraine, à Vandœuvre-lès-Nancy. Ainsi, la plupart des pavages sont périodiques, et forcer l'apériodicité n'est pas chose aisée car, très vite, des structures complexes apparaissent. Dans la première partie du XXe siècle, on ne connaissait d'ailleurs que des pavages périodiques.

TRANSLATION, ROTATION ET SYMÉTRIE

Un détour par un problème connexe permettra de mieux saisir la difficulté sous-jacente : le problème des dominos. En 1961, le logicien sino-américain Hao Wang (1921-1995) propose d'utiliser des carrés de taille identique avec des secteurs colorés pour paver le plan. La question qu'il se posait était : peut-on savoir si une collection donnée de tels carrés colorés – aujourd'hui nommés « tuiles de Wang » – peut paver le plan ? Travaillant sur ce problème des dominos, qui a des liens avec des questions de décidabilité algorithmique (problème de l'arrêt de Turing), l'Américain Robert Berger, étudiant de Wang, découvre en 1963 le premier pavage apériodique, qui nécessite 20 426 tuiles de Wang différentes… Ce pavage apériodique est un ingrédient clé de la preuve que le problème des dominos est indécidable : on ne peut pas construire un algorithme qui puisse y répondre. Au fil des ans, le nombre de tuiles nécessaire à la construction d'un pavage apériodique a été réduit. Tout d'abord à 104 tuiles, par Robert Berger lui-même, puis à 40 par le Suisse Hans Läuchli. En 1969, le mathématicien américain Raphaël M. Robinson s'inspire des tuiles de Wang pour créer un ensemble de six tuiles polygonales dont le recouvrement du plan est apériodique en utilisant la translation, la rotation et la symétrie (réflexion) (4).

Le Britannique Roger Penrose (prix Nobel de physique en 2020 pour sa contribution à la relativité générale et à la physique des trous noirs) commence à s'intéresser aux pavages dans les années 1970. En décomposant un pentagone en six pentagones plus petits et cinq demi-losanges fins, et en répétant le processus, il remarque qu'il peut combler la place restante avec d'autres formes : étoile, losange, pentagone et bateau. C'est ainsi qu'il obtient son premier pavage apériodique constitué de six pièces (trois pentagones, une étoile, un losange et un bateau). Par la suite, il met en évidence deux autres pavages apériodiques, mais toujours constitués de deux pièces différentes. En 1982, lorsqu'on découvre expérimentalement des matériaux qui n'ont pas



1978 PAVAGE DE PENROSE
Voici un des trois ensembles de tuiles apériodiques proposés par Roger Penrose, futur prix Nobel de physique (en 2020).

1989 TUILES DE SOCOLAR
En explorant les « quasi-cristaux », le physicien Joshua Socolar a découvert cet ensemble de trois tuiles dont l'assemblage forme un pavage apériodique avec une symétrie d'ordre 12 (symétrique par rotation d'un douzième de tour).

2010 TUILE DE SOCOLAR ET TAYLOR
Première monotuile apériodique, qui a toutefois le défaut de ne pas être d'un seul tenant.

Deux preuves valent mieux qu'une

Une fois démontré que votre tuile pave tout le plan, ce qui est la partie en général la plus facile, il faut aussi s'assurer que tous les pavages obtenus avec cette tuile sont apériodiques. Pour cela, les auteurs ont proposé deux démonstrations. La première consiste à essayer toutes les configurations possibles. C'est une preuve énumérative obtenue avec l'aide de l'ordinateur : on teste tous les cas et on aboutit à la conclusion que cela s'arrange toujours de manière apériodique. *« C'est une preuve classique de "force brute", mais qui n'est pas très satisfaisante en termes de compréhension,* confie Emmanuel Jeandel, professeur à l'université de Lorraine. *Les auteurs présentent toutefois une seconde preuve très élégante. »* Il s'agit d'un raisonnement par l'absurde en utilisant des déformations des tuiles. L'idée est de déformer continûment la tuile chapeau de deux façons pour aboutir à deux nouveaux pavages avec des tuiles plus simples. *« Leur argument est que s'il y avait une période pour la tuile chapeau, elle se répercuterait pour les deux nouveaux pavages plus simples. Or ils montrent que c'est incompatible »,* explique Nathalie Aubrun, chercheuse CNRS au Laboratoire d'informatique d'Orsay. Ph. P.

▲ *C'est en déformant la tuile chapeau que les auteurs sont parvenus à trouver la pièce en forme de spectre qui pave le plan de manière apériodique. Les déformations peuvent être différentes, de sorte que c'est toute une famille de pièces de type spectre qui a cette propriété.*

la régularité des cristaux, on s'aperçoit que ces « quasi-cristaux » ont des structures analogues aux pavages de Penrose. Les motifs résultants sont donc des pavages apériodiques qui présentent des symétries d'ordre 5 – on retrouve le même motif par une rotation d'un cinquième de tour, comme pour un pentagone régulier. Cela leur confère un aspect esthétique certain, de sorte qu'ils sont devenus très populaires : on les trouve aujourd'hui couramment en architecture et comme motif de décoration.

L'ÉTUDE DES QUASI-CRISTAUX

Dans les années 1980 et 1990, plusieurs ensembles de tuiles couvrant le plan euclidien de manière apériodique sont découverts. C'est le cas, en particulier, du pavage de Socolar, du nom du physicien américain Joshua Socolar, qui a mis en évidence ce pavage en 1989 en étudiant les quasi-cristaux. Il s'agit de trois tuiles – un losange allongé, un carré et un hexagone – avec des encoches qui contraignent les assemblages. En 2010, le même Socolar s'associe avec Joan Taylor pour proposer la première monotuile apériodique (5). C'est un grand pas, puisqu'on peut effectivement recouvrir ainsi le plan de manière apériodique, mais la pièce en question n'est pas connexe, c'est-à-dire qu'elle est constituée de plusieurs morceaux non connectés. Si l'on pense en termes de carreaux de carrelage, ce n'est pas très facile à fabriquer… Cette tuile de Socolar-Taylor est une nouvelle illustration du fait que des amateurs de mathématiques peuvent contribuer à la recherche dans ce domaine, puisque Joan Taylor, qui habite en Tasmanie (Australie), n'est pas mathématicienne, mais s'est prise de passion pour les pavages apériodiques après un seul regard sur un pavage de Penrose. Elle s'est alors mise à explorer le domaine, faisant quantité de dessins, avant de trouver une tuile hexagonale particulière qui lui montrait qu'elle s'approchait du but. *« Cette découverte a été partagée et étendue avec Joshua Socolar en 2009 et publiée par la suite »*, explique-t-elle sur son site, où elle a posté nombre de ses dessins – faits à la main –, qu'elle propose comme source d'inspiration pour toutes les personnes souhaitant explorer les pavages (6).

L'exploration des formes et des pavages était aussi l'une des activités préférées de David Smith. Mais, contrairement à Joan Taylor, il utilisait un logiciel nommé PolyForm Puzzle Solver. Lorsqu'en novembre 2022, il construit une tuile en forme de chapeau assez simple d'apparence, il s'amuse à tenter de remplir le plan à l'aide de l'ordinateur avec des copies de cette tuile.

D. SMITH, J.S. MYERS, C.S. KAPLAN, C. GOODMAN-STRAUSS

« C'est le problème de Heesch, explique Nathalie Aubrun, chercheuse CNRS au Laboratoire interdisciplinaire des sciences du numérique, à Orsay. *On part d'une tuile donnée et on cherche à paver autour d'elle avec des copies de la tuile : le nombre de Heesch est le nombre maximum de circonférences que l'on parvient à faire autour de la tuile de départ avant d'être bloqué. On sait qu'on arrive à atteindre une, deux, trois, quatre, cinq et six circonférences mais, au-delà, c'est un problème ouvert. »* Là, surprise : la tuile en forme de chapeau découverte par David Smith et son symétrique continuaient de paver le plan très loin, bien au-delà de six circonférences… Aussitôt, il fait part de sa découverte à Craig Kaplan, professeur d'informatique à l'université de Waterloo, au Canada, qui commence à étudier ce pavage. Le 20 mars 2023, la prépublication annonçant ce premier pavage apériodique à l'aide de cette pièce en forme de chapeau est mise en ligne, signée conjointement avec deux autres spécialistes reconnus des pavages, Chaim Goodman-Strauss, qui travaille au musée national des mathématiques de New York, et Joseph Samuel Meyer.

Là, surprise : la tuile en forme de chapeau et son symétrique continuaient de paver le plan bien au-delà de six circonférences

DÉMONTRER QUE TOUS LES PAVAGES OBTENUS SONT APÉRIODIQUES

Une fois la tuile exhibée, encore faut-il prouver qu'elle recouvre bien le plan de manière apériodique. En premier lieu, il faut démontrer que la tuile (et son symétrique) permet de paver tout le plan jusqu'à l'infini. Pour cela, les auteurs utilisent des techniques connues à base de substitution pour construire un pavage qui possède une invariance d'échelle (un peu comme une fractale), laquelle est incompatible avec une invariance par translation. *« La seconde partie de la preuve consiste à s'assurer que tous les pavages possibles (et pas seulement celui construit dans la première partie de la preuve) présentent cette invariance d'échelle, autrement dit que tous les pavages obtenus sont bien apériodiques,* explique Nathalie Aubrun. *Les auteurs proposent deux démonstrations : l'une aidée par ordinateur, qui explore de manière systématique toutes les possibilités, mais aussi une autre preuve originale, que je trouve très élégante, qui se fait par l'absurde, en déformant le chapeau, et via laquelle ils aboutissent à une incompatibilité qui permet de conclure »* (lire l'encadré p. 74).

Pour couronner le tout, le 28 mai 2023, un autre article est publié, par la même équipe, sur arXiv, présentant une déformation du chapeau pour aboutir au « spectre », cette fameuse tuile apériodique – en fait une famille de tuiles apériodiques –, qui ne nécessite pas de retournement. *« Ce n'est qu'après avoir publié le premier article sur la tuile en forme de chapeau que nous nous sommes rendu compte de l'existence possible d'une mono-tuile chirale »*, confie Dave Smith.

Finalement, si ces tuiles – le chapeau et le spectre – ont un aspect simple, de sorte qu'on peut s'étonner qu'elles n'aient pas été découvertes auparavant, elles font partie d'un « univers » d'une infinité de tuiles, ce qui explique la difficulté à trouver la bonne. *« Même lorsque vous avez ces tuiles sous les yeux, ce n'est pas si évident de voir qu'elles ont cette propriété d'apériodicité. Depuis que je m'intéresse aux pavages, je me suis souvent dit : "Le monde des pavages est plein de surprises et c'est pour cela que j'aime ce domaine" ; c'est aussi sans doute pour cela qu'il y a tant d'amateurs qui s'y plongent et trouvent des "trucs" »*, confie Michaël Rao, de l'ENS Lyon. Le monde des pavages n'a pas fini d'être exploré, mais même s'il reste quantité de problèmes ouverts, vous pouvez désormais carreler votre salle de bains ou votre cuisine de manière apériodique avec un seul carreau ! ■

Philippe Pajot

(1) D. Smith *et al.*, arXiv:2303.10798, 2023.
(2) D. Smith *et al.*, arXiv:2305.17743, 2023.
(3) D. Beauquier et M. Nivat, *Proc. Of the 6th Ann. Symp. On Com. Geometry,* 1990.
(4) R. M. Robinson, *Math. Ann., 179,* 296, 1969.
(5) J. E. S. Socolar et J. M. Taylor, *J. Comb. Theory A, 118,* 2207, 2011.
(6) http://taylortiling.com/

POUR EN SAVOIR PLUS

■ La découverte de cette tuile apériodique a déclenché un engouement sans précédent. Des pièces de Lego et des pièces de carrelage ont été créées, et un festival s'est tenu en juillet 2023 à l'université d'Oxford : https://sites.google.com/view/thegrimmnetwork/hatfest

■ Les auteurs ont aussi créé un site où ils proposent quantité de ressources, comme des logiciels pour faire ses propres pavages, des articles, des vidéos : https://cs.uwaterloo.ca/~csk/spectre/