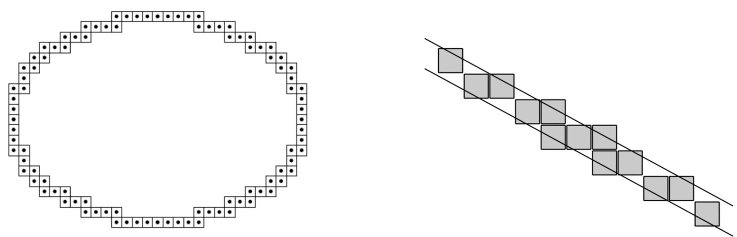
Codage des hyperplans arithmétiques discrets et systèmes de numération

Laboratoire : LORIA
Equipe : ADAGIO

Encadrants : Isabelle Debled-Rennesson et Eric Domenjoud

1 Contexte

La géométrie discrète a pour but l'étude des objets géométriques discrets (cf figure 1). Si ces objets peuvent être vus comme approximations d'objets continus, leurs propriétés intrinsèques, telle la connexité, peuvent également être étudiée d'un point de vue purement discret [2, 9]. En dimension 2, la droite discrète est un objet fondamental qui a été largement étudié [11, 4] (cf figure 1b). Elle apparaît dans de nombreux domaines des mathématiques, comme l'imagerie, la dynamique symbolique ou l'étude des suites arithmétiques modulaires.



(a) (b)

Figure 1 – (a) Courbe discrète d'une ellipse. (b) Une droite discrète. Les points de la droite sont représentés par des carrés unité dont les centres sont situés entre les 2 droites affines parallèle qui définissent la droite discrète.

1.1 Hyperplans discrets

Si les droites discrètes sont centrales dans l'étude de la géométrie dans $\mathbb{Z}^2$, on s'intéresse à une généralisation à $\mathbb{Z}^d$ dont les objets fondamentaux sont les hyperplans arithmétiques discrets [1, 3] (cf figure 2). Un hyperplan arithmétique H est décrit par deux hyperplans affines parallèles H_- et H_+ de $\mathbb{R}^d$. H est alors l'ensemble des points entiers entre ces deux hyperplans. Géométriquement, on représente ces points par des hypercubes unité, tout comme on représentait les points de la droite discrète par des carrés.

Un hyperplan arithmétique H est ainsi caractérisé par 3 paramètres :

— un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ qui est le vecteur normal aux hyperplans affines H_- et H_+.
— une *épaisseur* $\theta \in \mathbb{R}_+$ qui définit la *distance* entre H_- et H_+.
— un *décalage* $\mu \in \mathbb{R}$ qui est la distance de H_- à l'origine.

Formellement, l'hyperplan arithmétique $H(v, \mu, \theta)$ est l'ensemble $\{x \in \mathbb{Z}^d \mid 0 \leqslant \langle v, x\rangle + \mu < \theta\}$.

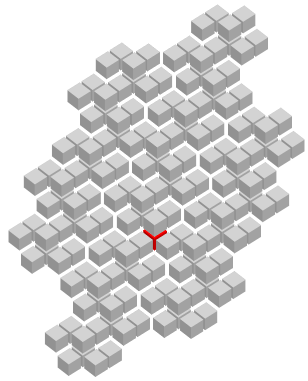


FIGURE 2 – Une portion d'hyperplan discret en dimension 3

1.2 Connnexité

On s'intéresse à la connexité de ces hyperplans. Une partie E de $\mathbb{Z}^d$ est connexe si et seulement si entre deux points quelconques de E, il existe dans E un chemin formé de points adjacents, où deux points sont adjacents si et seulement si leur différence appartient à un voisinage fixé de l'origine. On étudie la connexité des hyperplans en fonction du voisinage de l'origine choisi et des 3 paramètres v, μ et θ.

L'étude de la connexité par faces (relative au voisinage par faces) a été traitée intégralement. Deux points x et y sont dits voisins par faces si et seulement si $\|x - y\|_1 \leqslant 1$. En termes géométriques, cela revient à dire que les 2 cubes unités centrés en x et y ont une face en commun, d'où le nom de connexité par faces. Par exemple, l'hyperplan de la figure 2 est connexe par faces mais pas la droite de la figure 1.

Selon la valeur du triplet (v, μ, θ), on peut caractériser si un $H(v, \mu, theta)$ est connexe par faces ou non :

— d'après [5], il existe une épaisseur critique $\Omega(v, \mu)$, dite « épaisseur de connexité », telle que $H(v, \mu, \theta)$ est non vide et connexe si $\theta > \Omega(v, \mu)$ et est vide ou non connexe si $\theta < \Omega(v, \mu)$ alors $H(v, \mu, \theta)$. Cette épaisseur critique peut être calculée au moyen de l'*algorithme totalement soustractif* décrit dans [12] (voir algo 1 ci-dessous).

— Les vecteurs normaux v pour lesquels $H(v, 0, \Omega(v, 0))$ est connexe peuvent être caractérisés grâce à l'algorithme totalement soustractif [7]. Il a été montré dans [10] que l'ensemble $\mathcal{K}_d$ de ces vecteurs est de mesure nulle : l'hyperplan est donc presque toujours non connexe.

— Enfin, en prenant un $v \in \mathcal{K}_d$, on montre dans [6] que l'on peut caractériser l'ensemble des décalages μ rendant $H(v, \mu, \Omega(v, \mu))$ connexe via un automate de Büchi.

Pour calculer l'épaisseur de connexité par faces, on utilise l'algorithme totalement soustractif [12] (*cf* algo. 1). Cet algorithme ne termine que lorsque le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par les coordonnées de v est de dimension 1 mais il est toutefois toujours convergent. Si $(v^n, \Omega^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite engendrée par l'algorithme alors $\Omega(v) = \Omega^\infty + \|v^\infty\|_\infty$.

1.3 Δ-numération

L'algorithme totalement soustractif induit une suite $\Delta = (\delta_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ où $\delta_n \in [\![1, d]\!]$ est l'indice d'une coordonnée minimale de v^n. On appelle θ_n cette plus petite coordonnée. On peut établir des relations de récurrence sur les

$\Omega \leftarrow 0$;
$d \leftarrow$ dimension de v (nombre de coordonnées) ;
tant que $d \neq 1$ **faire**
  si *v a une coordonnée v_k nulle* **alors**
    $v \leftarrow (v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_d)$;
    $d \leftarrow d - 1$
  fin
  sinon
    $v_k \leftarrow \min_{i \in [\![1,d]\!]} v_i$;
    $\Omega \leftarrow \Omega + v_k$;
    $v \leftarrow (v_1 - v_k, \ldots, v_{k-1} - v_k, v_k, v_{k+1} - v_k, \ldots, v_d - v_k)$
  fin
fin
retourner Ω

Algorithme 1 : Calcul de $\Omega(v, 0)$

θ_n comme dans [7] et, dans le cas où la suite Δ est périodique, exprimer les θ_n dans le corps $\mathbb{Q}[\beta]$ où β est un réel algébrique qui est l'inverse d'un nombre de Pisot. On montre que si $v \in \mathbb{K}_d$, alors

$$\left\{ \sum_{i \in \mathbb{N}} \varepsilon_i \, \theta_i \mid (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \right\} = [0, \Omega].$$

On s'intéresse alors à un nouveau système de numération, appelé Δ-numération, où la suite d'entiers $a_1, \ldots, a_n, \cdots \in \mathbb{Z}^\omega$ encode le réel $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n \theta_n$ s'il existe. En considérant une suite bi-infinie $(\theta_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant les mêmes relations de récurrence, on obtient un codage canonique de tout réel par une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Les propriétés de la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ permettent de déduire des algorithmes de calcul des opérations usuelles dans ce nouveau système de numération.

2 Objectifs de la thèse

Le premier objectif de la thèse est de généraliser les résultats connus sur la connexité par faces à des connexités issues de voisinages quelconques de 0. Ainsi, en se donnant un voisinage $\mathcal{V}$ de 0, convexe et symétrique, on étudiera la connexité des hyperplans pour la relation de voisinage suivante : "x et y sont voisins si et seulement si $x - y \in \mathcal{V}$". Par exemple, la droite discrète de la figure 1 est connexe si l'on prend une relation de voisin où il suffit que les carrés aient un sommet en commun mais pas s'il doivent partager une arête. Le but est : (1) d'étudier dans le cas général l'existence d'une épaisseur de connexité, et dans ce cas, de décrire un algorithme permettant de la calculer ; (2) d'étudier la connexité et d'autres propriétés topologiques des hyperplans à cette épaisseur critique ; (3) d'en déduire une méthode générale de génération incrémentale des hyperplans.

La suite Δ et le système de numération associé dépendent du vecteur normal v et de la notion de voisinage considérée. Le second objectif de la thèse est l'étude et la formalisation de ces systèmes de numération dans le cas d'une relation de voisinage quelconque, ainsi que le lien entre ces systèmes de numération et le système usuel de β-numération où la suite $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ encode le réel $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \beta^n$.

Références

[1] E. Andrès, R. Acharya, and C. Sibata. Discrete analytical hyperplanes. *CVGIP : Graphical Model and Image Processing*, 59(5) :302–309, 1997.

[2] D. Coeurjolly, A. Montanvert, and J.-M. Chassery. *Géométrie discrète et images numériques.* Hermès, Sept. 2007. Traité IC2, série signal et image. ISBN 13 : 978-2-7462-1643-3.

[3] I. Debled and J.-P. Reveillès. A new approach to digital planes. In *Spie's Internat. Symposium on Photonics and Industrial Applications—Technical conference vision geometry*, volume 3, 1994.

[4] I. Debled-Rennesson and J.-P. Reveillès. A linear algorithm for segmentation of digital curves. *Int. J. Pattern Recognit. Artif. Intell.*, 9(4) :635–662, 1995.

[5] E. Domenjoud, D. Jamet, and J.-L. Toutant. On the connecting thickness of arithmetical discrete planes. In S. Brlek, C. Reutenauer, and X. Provençal, editors, *DGCI*, volume 5810 of *LNCS*, pages 362–372. Springer, Oct. 2009.

[6] E. Domenjoud, B. Laboureix, and L. Vuillon. Facet Connectedness of Arithmetic Discrete Hyperplanes with Non-Zero Shift. In *DGCI 2019 : 21st International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 11414 of *LNCS*, pages 38–50, Paris, France, Mar. 2019.

[7] E. Domenjoud, X. Provençal, and L. Vuillon. Facet Connectedness of Discrete Hyperplanes with Zero Intercept : The General Case. In E. Barcucci, A. Frosini, and S. Rinaldi, editors, *18th IAPR International Conference, DGCI 2014*, volume 8668 of *LNCS*, pages 1–12, Siena, Italy, Sept. 2014. Springer International Publishing.

[8] E. Domenjoud and L. Vuillon. Geometric Palindromic Closure. *Uniform Distribution Theory*, 7(2) :109–140, Dec. 2012. http ://www.boku.ac.at/MATH/udt/vol07/no2/06DomVuillon13-12.pdf.

[9] R. Klette and A. Rosenfeld. *Digital geometry – geometric methods for digital picture analysis.* Morgan Kaufmann, 2004.

[10] C. Kraaikamp and R. Meester. Ergodic properties of a dynamical system arising from percolation theory. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 15(04) :653–661, 1995.

[11] J.-P. Réveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.* Thèse d'état, Université Louis Pasteur (Strasbourg, France), 1991.

[12] F. Schweiger. *Multidimensional continued fractions.* Oxford Science Publications. Oxford University Press, Oxford, 2000.