Evaluation de performances stochastiques des réseaux

Intervenant: *Ye-Qiong SONG (song@loria.fr)*

Objectif : Techniques nécessaires (Files d'attente, simulation) à l'évaluation de performances des réseaux (et systèmes distribués)

Contenu :

- Rappel des probabilités, Chaînes de Markov
- Théorie des files d'attente, file M/G/1
- Simulation à événements discrets
- Evaluation de performances des réseaux (commutation)
- Evaluation des protocoles d'accès aléatoire (type CSMA)

Pré-requis de la partie stochastique:

- Probabilité et processus stochastiques, [Théorie des files d'attente]
- Réseaux

Introduction à la modélisation et l'évaluation de performances

Systèmes à événements discrets :
Systèmes décrits par variables d'état discrètes. Les changements d'état se produisent sous occurrence des événements

Exemples :

- nombre de clients dans la file d'attente devant un guichet (vie quotidienne),
- nombre de processus dans un CPU (système informatique),
- nombre de pièces en stock ou en traitement sur des machines (système de production),
- nombre de messages ou paquets en attente dans les nœuds de réseaux (réseaux de communication)
- etc…

Evaluation de performances des réseaux: calculer des paramètres de performances

- **temps de réponse** d'un client (message ou paquet)
- **débit :** taux d'utilisation d'une liaison réseau
- **nombre de clients** (message ou paquet) dans un nœud réseau (occupation de mémoire)

Paramètres de performances définis dans la QoS :

- Bandwidth : Peak Data Rate (PDR), Sustained Data Rate (SDR), Minimum Data Rate (MDR)
- Delay: End-to-End or Round-Trip Delay, Delay Variation (Jitter)
- Reliability: Availability (as % Uptime), Mean Time Between Failures/Mean Time To Repair (MTBF/MTTR), Errors and Packet Loss

Types de résultats :

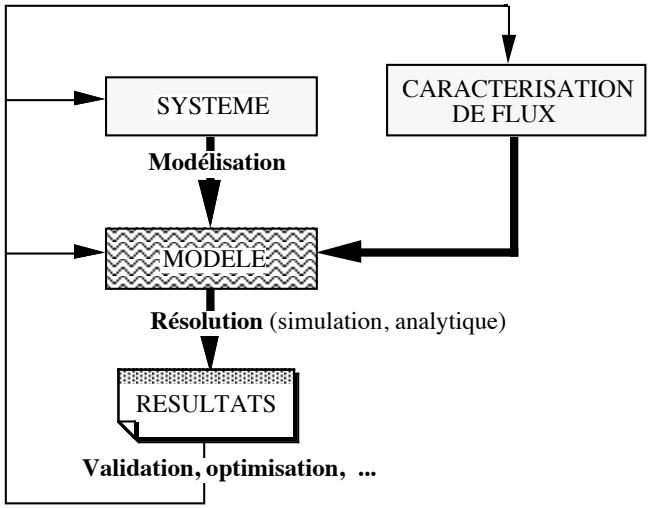
- valeur moyenne
- variance
- distribution de probabilité (renseignement complet d'une variable aléatoire)
- valeur maximale (pour garantie déterministe, QoS dans les réseaux)

Pourquoi évaluer les performances d'un système ?

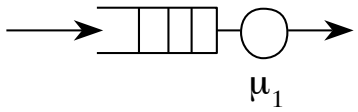
- en conception, satisfaire le cahier des charges
- en exploitation, rendre le système plus performant
- *en recherche, justifier l'intérêt d'une nouvelle solution (algorithmes, protocoles, architectures, ...)*

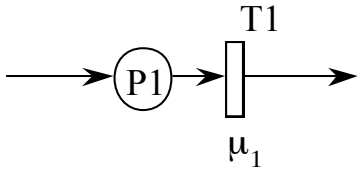
Comment évaluer les performances d'un système ?

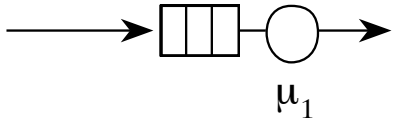
- modéliser : décrire le système dans un **formalisme** en fonction du besoin d'analyse (Files d'attente, Réseaux de Petri, automates stochastiques, …)
- analyser :
    - analyse qualitative (pour vérifier les propriétés structurelles et comportementales tq. Vivacité, stabilité, …)
    - analyse quantitative
        - méthodes analytiques (FdA, automates stochastiques, …)
        - simulation

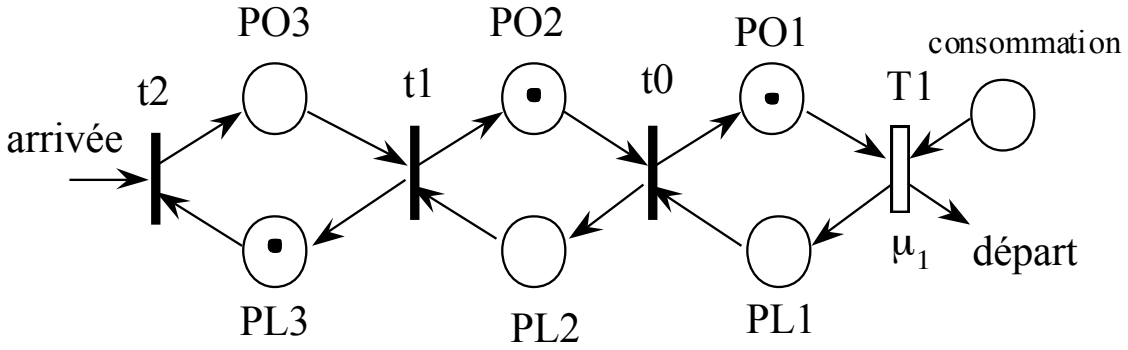


Formalismes : Réseaux de Petri temporisés et stochastiques vs. Réseaux de FdA



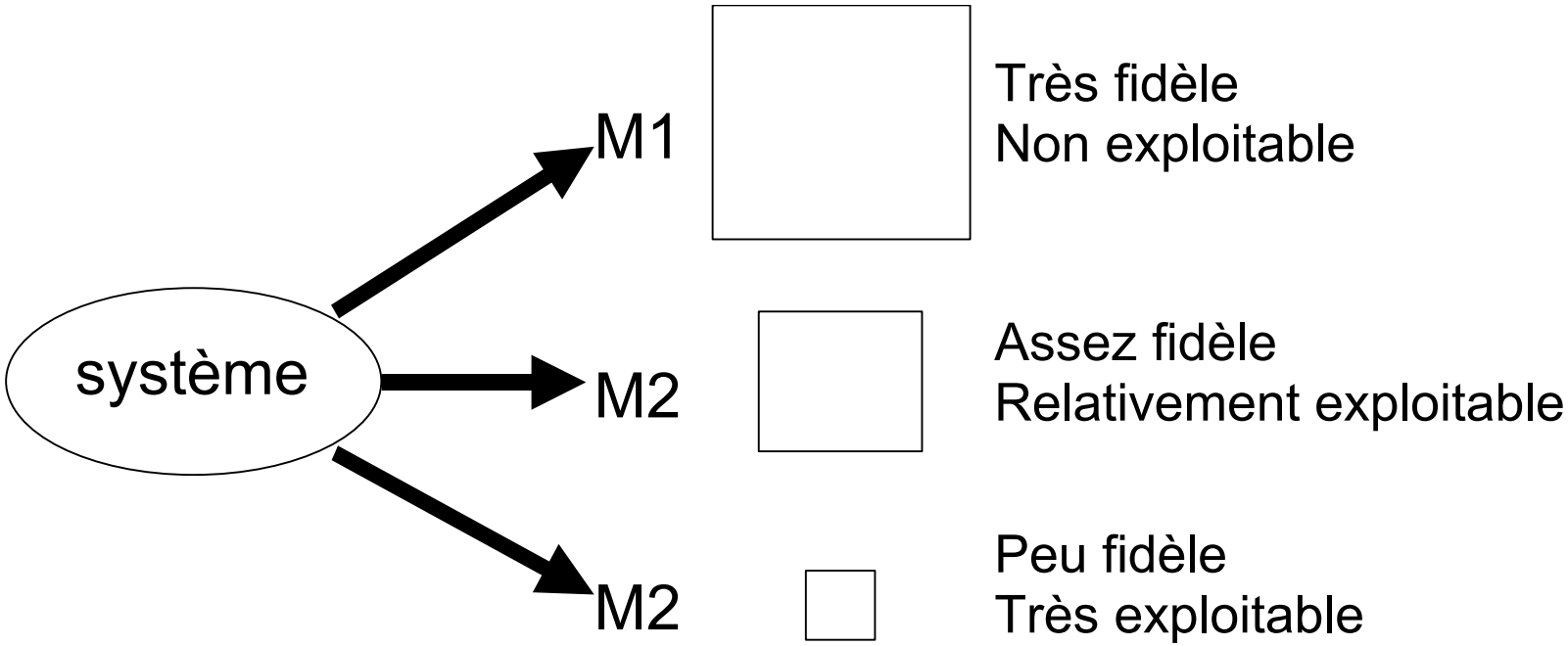






Modélisation (modèle vs. Système réel) :

- Performances obtenues sont celles du modèle et non celles du système réel !
- Compromis entre adéquation modèle-système et facilité d'analyse du modèle



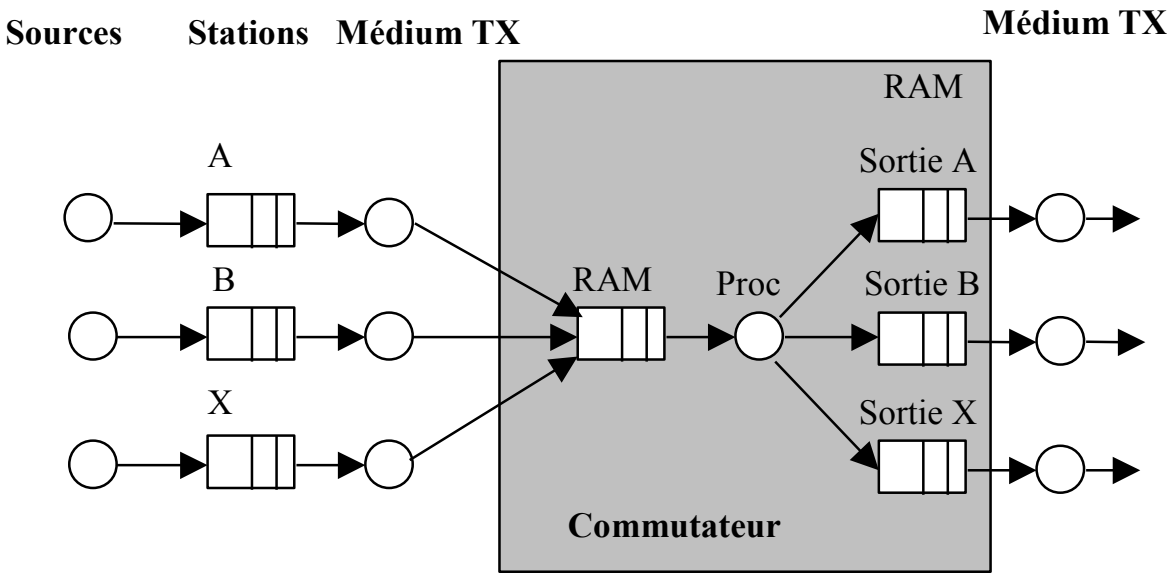
Caractérisation stochastique des systèmes

- En réalité, tous les systèmes sont déterministes (prévoir leur évolution avec certitude)
- Dans la pratique, on ne dispose pas toutes les informations nécessaires, ou l'analyse fine est trop complexe.
- On fait recours alors à la notion d'aléatoire. Il s'agit de remplacer les informations manquantes ou trop complexe à exploiter par une caractérisation stochastique (probabiliste)
- Exemple 1 : lancé d'un dé
    - Forme et texture de la surface
    - Position initiale dans la main
    - Mouvement exact de la main pendant le lancer
    - Lois de frottement du dé sur la main, dans l'air et sur la table

    ==> Ecrire les équations mécaniques régissant le mouvement du dé, et les résoudre

    ==> valeur sur laquelle s'arrêtera le dé !
    - Caractérisation exacte est impossible
    - Probabilité 1/6 pour représenter son comportement **moyen**
- Exemple 2 : routage des paquets dans les réseaux
    - Si l'administrateur ne s'intéresse qu'à la charge moyenne de chaque lien de sortie d'un routeur
    - Routage déterministe peut être remplacé par routage probabiliste

Exemple de modéliser un commutateur



Matrice de trafic (nombre de paquets / seconde)

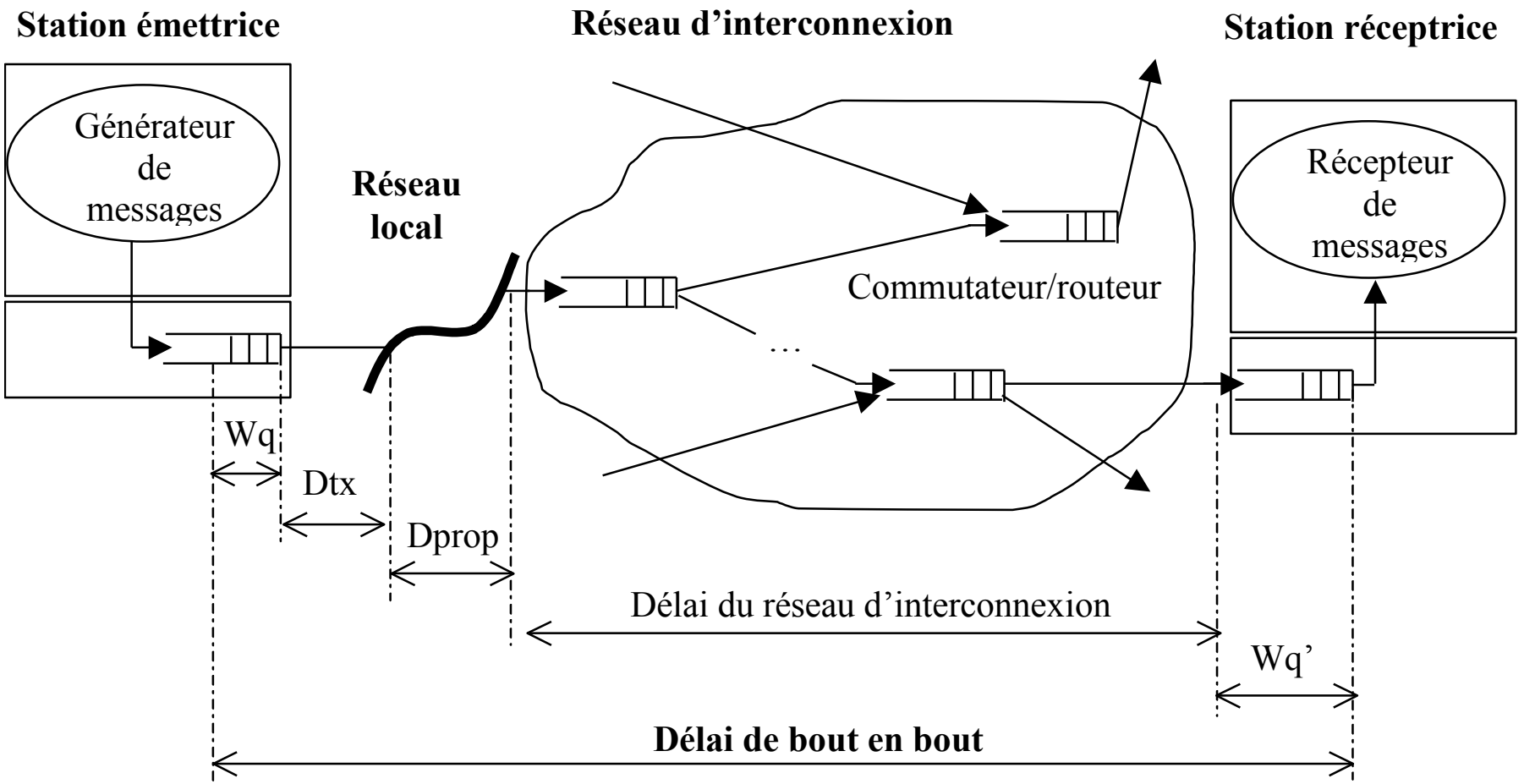
vers / de	**A**	**B**	**X**
A		5	8
B	7		10
X	1	1	100

Méthodes de résolution

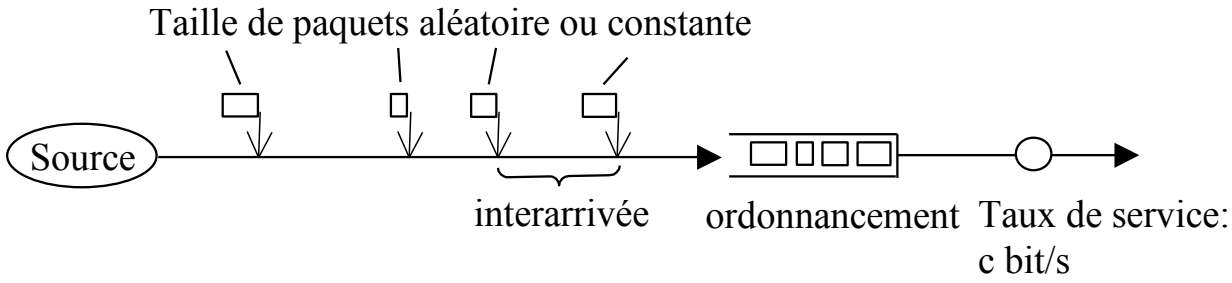
- Simulation
  - Par programmation en langages généraux : C, Java, …
  - Outils autour des FdA : JMT (http://jmt.sourceforge.net/), Opnet (www.opnet.com), ns2 et 3 (www.isi.edu/nsnam), OMNeT++ (www.omnetpp.org), …
- Analytique
  - **Analyse probabiliste, théorie des FdA, résultats statistiques**
  - Analyse déterministe (exemple : analyse d'ordonnançabilité dans le pire cas, Network calculus ou Algèbre max/min, +), résultats du type bornes supérieures

- Mesure de performance (si le système existe)
  - Wireshark (ex Ethereal), …

Les attentes dans un réseau et les paramètres de performances:



Trafic dans les réseaux, performances moyennes (probabilistes) et la garantie de QoS
Un exemple :

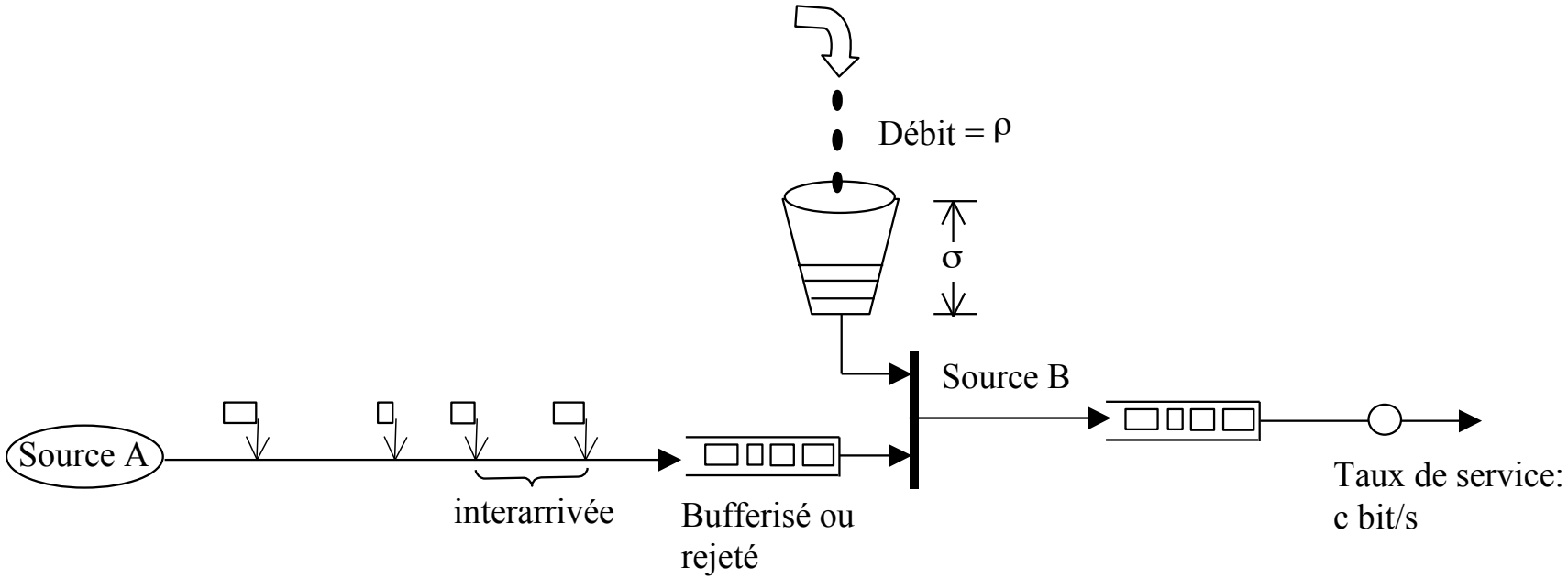


Objectif de l'évaluation de performances : fournir une garantie sur le temps de traversée du système d'un paquet

- Si pas de connaissance sur le trafic d'entrée dans la file d'attente, aucune garantie possible
- Si connaissance stochastique sur le trafic, garantie probabiliste ou temps de traversée moyen
  - Si interarrivée exponentielle et taille de paquets distribuée exponentiellement, file M/M/1
  - Si interarrivée exponentielle et taille de paquets constante, file M/D/1

Si on veut une garantie absolue, il faut plus de connaissance sur le trafic d'entrée. Par exemple, trafic périodique ou périodique avec des gigues (cf. ordonnancement). Ce type de trafic est souvent difficile à obtenir à cause des comportements non déterministes des équipements réseaux.

Dans la pratique on peut implémenter un limiteur de trafic (Leaky bucket)

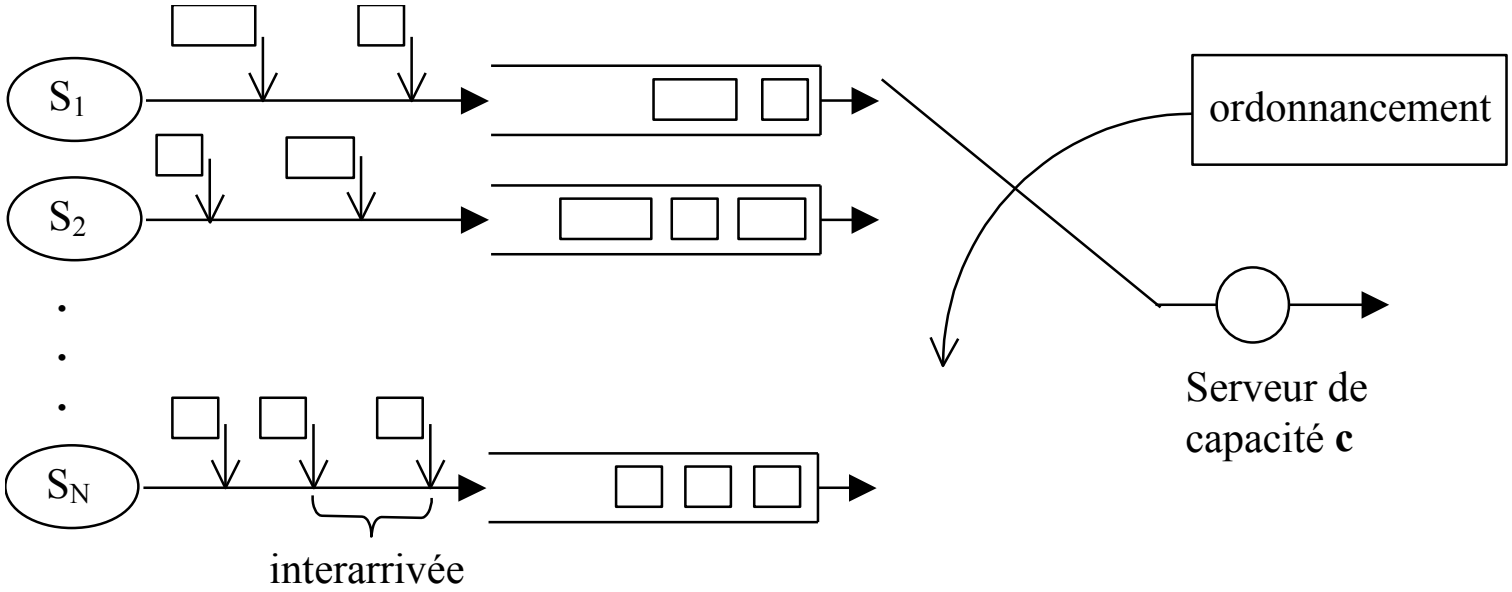


Attention : la garantie est donnée vis à vis de source B mais non plus source A

La source B est dite (σ, ρ)-borné avec σ la taille de rafale et ρ le débit moyen. Le trafic entrant durant [0, t[est alors borné par :

$$B(t) = \sigma + \rho t$$

Partage de ressources réseaux (liens de sortie d'un nœud)

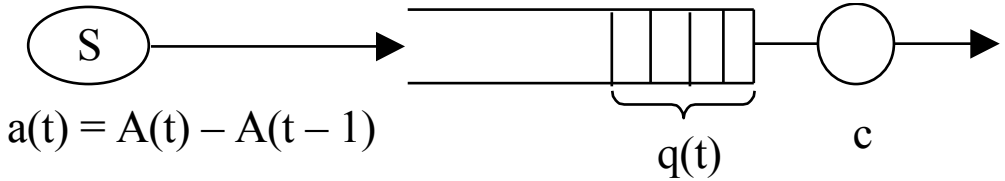


Flux et contraintes :

- **Périodique ou sporadique**: date initiale quelconque (C_i, T_i) ou fixe (r_i, C_i, T_i)
- **Périodique avec gigues** : (C_i, T_i, J_i) ou (r_i, C_i, T_i, J_i)
- **(σ_i, ρ_i)-borné**
- **Aléatoire** avec un temps moyen d'inter-arrivée T_i et un temps moyen de service C_i

La quantité du travail apportée par un client est définie par W_i avec notamment $C_i = W_i / c$.

- **Modèle de base :**

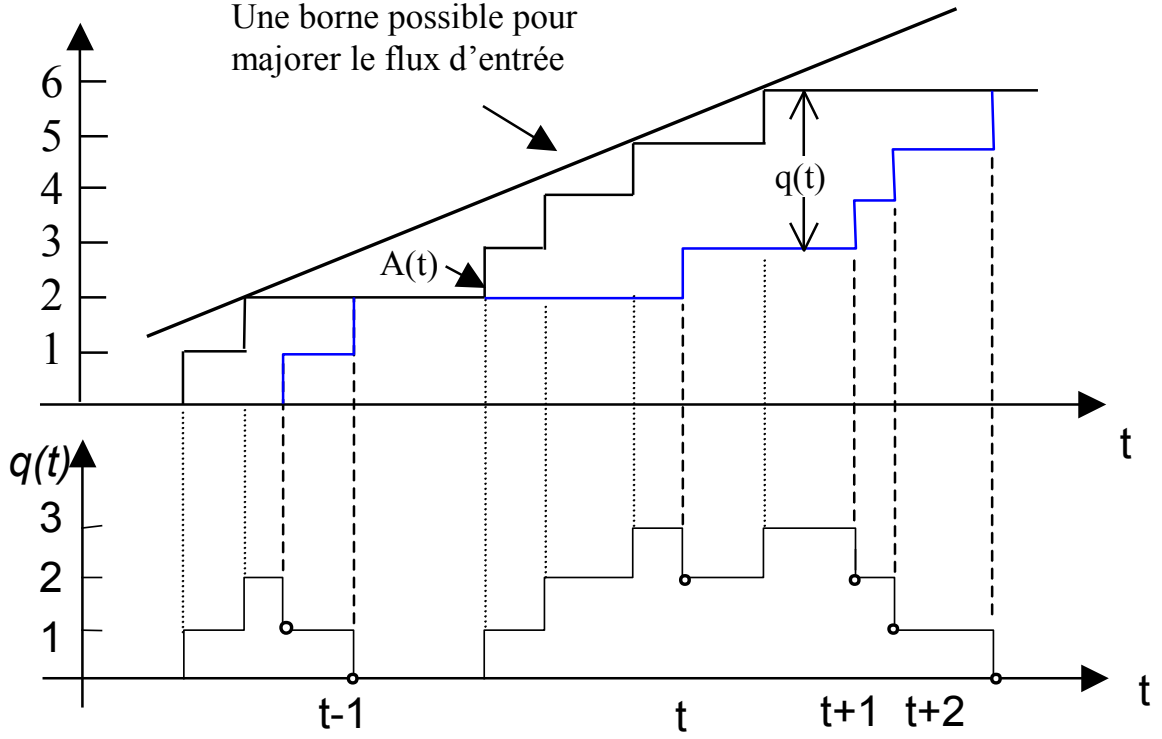


Equation de Lindley :

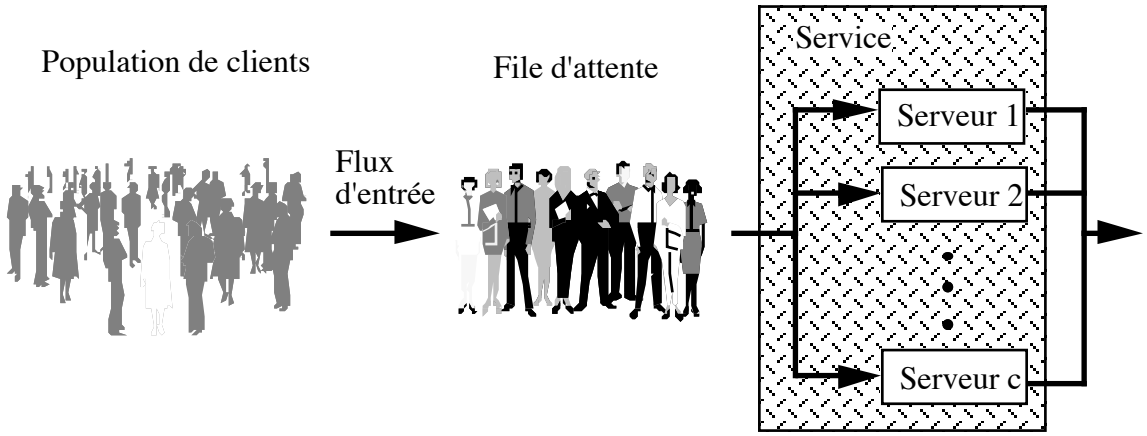
$$q(t+1) = max(0,\ q(t) + a(t+1) - c)$$

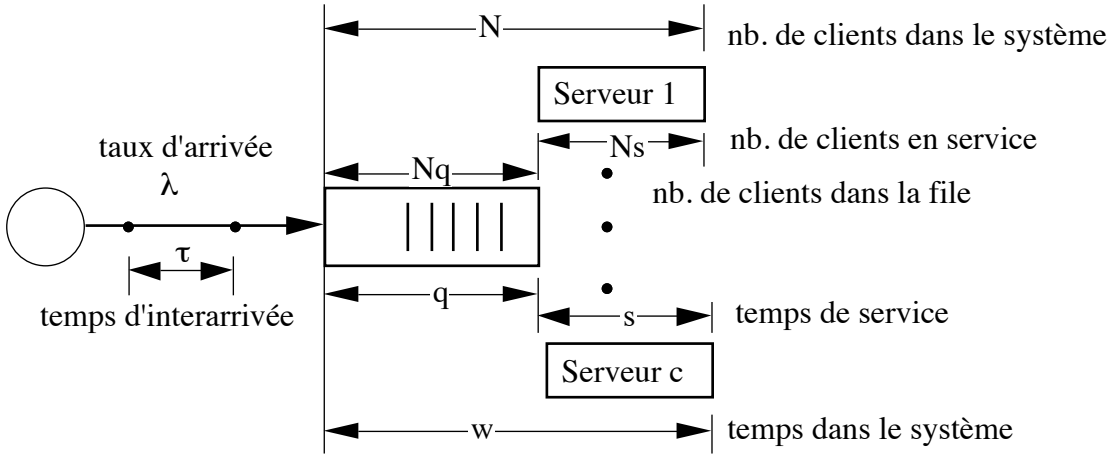
ou

$$q(t+1) = (q(t) + a(t+1) - c)^{+} \text{ avec } x^{+} = max(0,x)$$



File d’attente :





Notation de Kendall : *A/B/m/K/N/Z*

- *A* : Processus d' arrivée des clients (distribution d'interarrivée).
- *B* : Schéma de service (distribution de durée de service de clients).
- *m* : nombre de serveurs.
- *K* : capacité maximale de la file d'attente.
- *N* : nombre de clients utilisant le système.
- *Z* : discipline du système qui décrit la façon dont les clients sont ordonnancés.

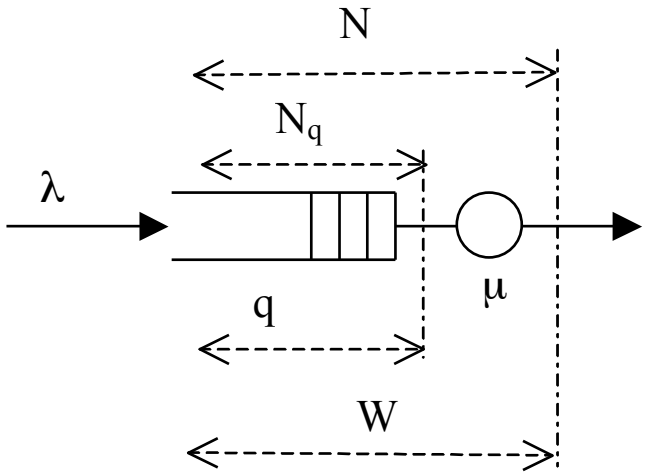
Pour les arrivées et les services on utilise les symboles suivants:

- *M* : loi exponentielle.
- *D* : loi déterministe.
- *G* : loi générale.
- H_k : loi hyperexponentielle d'ordre *k* .
- E_k : loi d'Erlang d'ordre *k* .

Le nombre de serveurs peut varier de 1 à l'infini (noté ∞), de même pour *K* et *N* .
En ce qui concerne *Z*, les ordonnancements les plus utilisés sont:

- FIFO (First In, First Out).
- LIFO (Last In, First Out).
- RANDOM: le prochain client à servir est choisi aléatoirement.
- Round-Robin (cyclique avec un quantum *Q*).
- PS (Processor Sharing): Round-Robin avec *Q* tend vers *0*. Tous les *n* clients servis en même temps avec un taux μ/n.
- PRIOR (Avec priorité, avec préemption ou sans préemption).

Résultats généraux :



Condition de stationnarité : $\lambda < \mu$

Formules de LITTLE :

$$E(N) = \lambda E(W)$$

et

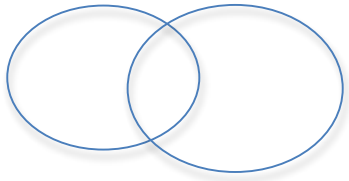
$$E(N_q) = \lambda E(q)$$

$$E(W) = E(q) + 1/\mu$$

Probabilités élémentaires (rappel)

- Ω : l'univers des événements
- A (ou ω) : un sous-ensemble de Ω
- P[Ω] = 1, P[∅] = 0
- Les opérations des ensembles classiques

$$P[A \cup B] = \begin{cases} P[A] + P[B], & \text{si } A \cap B = \varnothing \\ P[A] + P[B] - P[A \cap B], & \text{sinon} \end{cases}$$



$$P[A \cap B] = P[A] \bullet P[B], \quad \text{si A et B sont indépendantes}$$

Probabilité conditionnelle :

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Probabilité totale :

$$\bigcup_{i \in E} A_i = \Omega; \quad A_i \cap A_j = \varnothing, \ \forall i \neq j \ ; \qquad P[B] = \sum_{i \in E} P[B|A_i] \bullet P[A_i]$$

Exemple de la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé :

On lance un dé : Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
Soit A l'événement : le résultat est impair ; A = {1, 3, 5}
Soit B l'événement : le résultat est inférieur ou égal à 3 ; B = {1, 2, 3}

$$A \cap B = \{1,3\} \qquad P[A \cap B] = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[A] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P[B] = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Si A est réalisé, c'est que l'on tire soit 1, soit 3, soit 5 ; B est alors réalisé si on a tiré soit 1, soit 3 (mais pas 5), c'est à dire si $A \cap B$ est réalisé.

La probabilité de B sachant que A est réalisé est alors 2/3.

$$P[B|A] = \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

Variables aléatoires (rappel)

Une v.a. X prend la valeur à l'issue d'une expérience aléatoire (e.g. loto).
A chaque événement ω de Ω, on associe un nombre $X(\omega) \in E$ (espace fini ou infini).
X est une application probabilisable de l'espace (Ω, P) dans E.

Exemple : Expérience aléatoire du lancer d'un dé.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
v.a. : $X(\omega) = -1$ si $\omega \leq 3$
$X(\omega) = 1$ si $\omega \geq 4$
$E = \{-1, 1\}$

Probabilité que X prenne une des valeurs de E :

$$P[X=x] = P[\{\omega \in \Omega \text{ t.q. } X(\omega)=x\}, x \in E]$$

Deux types de v.a. : Discrète et Continue :

- v.a. discrète X, $E \subset \mathbb{Z}$

  probabilité d'état : p(n) = P[X=n], n = -∞, …, +∞, avec $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(n) = 1$

- v.a. continue X, $E \subset \mathbb{R}$
  fonction de densité de probabilité :

  $f_X(x)$ pour x ∈ [-∞, +∞], avec $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$

  $$f_X(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P[x < X \leq x + \Delta x]}{\Delta x}$$

- X est une v.a. à valeur positive :
  Cas discret : p(n) = 0, n = -∞, …, -1
  Cas continu : $f_X(x) = 0$ pour x ∈ [-∞, 0[

Fonction de répartition $F_X(x) = P[X \leq x]$

- Une v.a. est parfaitement caractérisée par sa fonction de répartition
- $F_X(x) \geq 0$ pour tout x
- $F_X(x) \geq F_X(y)$ pour tout $x \geq y$
- $F_X(-\infty) = 0$ et $F_X(+\infty) = 1$
- $P[a < X \leq b] = F_X(b) - F_X(a)$ pour tout $a \leq b$

Cas discret :

$$P[n < X \leq m] = \sum_{k=n+1}^{m} p(k) = F_X(m) - F_X(n)$$

Cas continu :

$$P[a < X \leq b] = \int_a^b f_X(y)dy = F_X(b) - F_X(a)$$

Les moments, Espérance et Variance

Cas discret :

$$E[X] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} np(n)$$

$$E[X^k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^k p(n)$$

Cas continu :

$$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

$$E[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_X(x) dx$$

- Une v.a. est parfaitement caractérisée par tous ses moments
- La variance V[X] et l'écart-type σ[X] :

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

$$\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$$

- Le coefficient de variation cv[X] : $cv[X] = \frac{\sigma[X]}{E[X]}$

Les lois de probabilité (rappel)

Loi géométrique modifiée :
v.a. discrète de paramètre *a* ayant $P[X=n] = a^n(1-a)$; $n = 0, 1, \ldots$
Interprétation :
X : nombre de tirages consécutifs de « pile »
P[X=n] : probabilité de tirer « pile » exactement n fois de suite
a : probabilité de tirer « pile »
1-a : probabilité de tirer « face »

$$E[X] = \sum_{n=1}^{\infty} nP[X = n] = \frac{a}{1-a}$$

$$V[X] = \frac{a}{(1-a)^2}$$

Exercice : démontrer ces deux propriétés ci-dessus.

Loi géométrique « de base » : $P[X=n] = a^{n-1}(1-a)$; $n = 1, 2, \ldots$

Propriété sans mémoire de la loi géométrique :

$P[X \leq n+n_0 \mid X \geq n_0] = P[X \leq n]$

Explication : Ce n'est pas parceque l'on a déjà tiré 50 fois de suite « pile » que l'on a plus de chance, au coup suivant, de tomber sur « face ».
La pièce ne garde pas la mémoire des tirages précédents !

Il s'agit de la seule loi discrète sans mémoire

Loi de Poisson

v.a. discrète X de paramètre λ, ayant $P[X = n] = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

Propriété : $E[X] = V[X] = \lambda$
Exercice : démontrer cette propriété.

Les lois de Poisson s'additionnent : $Z = X + Y$, X de λ_1 et Y de λ_2

$$P[Z = n] = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)}$$

Loi exponentielle

v.a. continue T de paramètre λ, ayant $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}; \quad t \geq 0$

($f_T(t) = 0; \quad t < 0$)

Propriété 1 :

$$F_T(t) = P[T \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_T(x)dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

Propriété 2 :

$$E[T] = \int_{0}^{\infty} t f_T(t)dt = \frac{1}{\lambda}$$

Exercice : démontrer la propriété 2

Propriété 3 (sans mémoire) :

$$P[T \le t + t_0 \,|\, T > t_0] = P[T \le t]$$

Preuve :

$$P[T \le t + t_0 \,|\, T > t_0] = \frac{P[t_0 < T \le t + t_0]}{P[T > t_0]} = \frac{F_T(t + t_0) - F_T(t_0)}{1 - F_T(t_0)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t_0}(1 - e^{-\lambda t})}{e^{-\lambda t_0}} = 1 - e^{-\lambda t} = P[T \le t]$$

Interprétation de la propriété 3 :
Paradoxe de l'inspection (exemple de passage de bus).
Deux passages consécutifs d'un bus suivent une distribution exponentielle de λ.
Si les bus passent en moyenne toutes les $1/\lambda = 15$ minutes, et qu'on attend depuis une heure.
Tout ce qu'on sait dire : le prochain bus n'arrivera en moyenne que dans 15 minutes !

La loi expoentielle est la seule loi continue sans mémoire.

Processus stochastiques (rappel)

Un processus stochastique $\{X(t)\}_{t\in T}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire.

A chaque $t\in T$, $X(t)$ est donc une v.a.

- T peut être discret ou continu
- L'ensemble de l'espace d'état E dans lequel X(t) prend des valeurs peut être discret (fini ou infini) ou continu.

Processus de comptage :

Un processus stochastique {X} à espace d'état discret est un processus de comptage ssi toute réalisation particulière (trajectoire) de X est une fonction croissante, nulle en 0 :

En discret : $X_0 = 0$; $X_{n-1} \leq X_n, \ \forall n \in Z$

En continu : $X(0) = 0$; $X(t) \leq X(s)$, $\forall t < s \in \mathbb{R}$

Un processus stochastique est dit à incréments indépendants ssi :

En discret : $X_n - X_{n-1}, X_{n-1} - X_{n-2},\ldots, X_1 - X_0$ sont indépendants

En continu : $X(t_n) - X(t_{n-1}), X(t_{n-1}) - X(t_{n-2}),\ldots, X(t_1) - X(t_0)$ sont indépendants

Un processus stochastique est dit stationnaire ssi :

En discret : $X_n - X_{n-1}$ et $X_1 - X_0$ sont distribuées selon la même loi $\forall n \in \mathbf{Z}$

En continu : $X(s+t) - X(s)$ et $X(t) - X(0)$ suivent la même loi $\forall t \ et \ s \in [0, \infty[$

Processus de Poisson :

Une chaîne à temps continu et à espace d'état discret {N(t)} est un processus de Poisson de paramètre λ ssi :

- {N(t)} est un processus de comptage
- {N(t)} est un processus stationnaire et à incréments indépendants
- $P[N(s+t)-N(s)=k]=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$

Arrivées Poissonniennes ←→ inter-arrivées exponentielles

Décomposition et superposition

Transformés en z et de Laplace :

Pour une v.a. discrète x, sa f.g. :

$$X(z) = E[z^x] = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P[x = i]$$

où z est une variable complexe.

Nous avons l'équivalence suivante : f.g. ←→ p.d.f. (i.e. P[X=i]). Au fait,

$$P[x = i] = \frac{1}{i!} \frac{d^i X(z)}{d^i z}\Big|_{z=0}$$

L'intérêt de passer par la f.g. est la facilité d'obtention des moments d'une v.a.

$$E[x] = \frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=1} = \sum_{i=0}^{\infty} i z^{i-1} P[x = i]\Big|_{z=1}$$

$$E[x^2] = \frac{d^2 X(z)}{d^2 z}\Big|_{z=1} + \frac{dX(z)}{dz}\Big|_{z=1}$$

Pour une v.a. continue x, sa f.g. est donnée par la transformé de Laplace:

$$P(s) = E[e^{-sx}] = \int_0^\infty e^{-st} f_x(t) dt$$, quand x est positive.

$$\frac{d^j P(s)}{ds^j}\Big|_{s=0} = \int_0^\infty (-t)^j f_x(t) dt = (-1)^j E[x^j]$$

Chaînes de Markov - définitions

Processus aléatoire :

Un processus aléatoire à valeurs dans un ensemble E, est une famille de v.a (variable aléatoire) X_t à valeurs dans E indexées par un paramètre t décrivant l'ensemble T et on note $(X_t ; t \in T)$.

Chaîne de Markov :

$$P[X_t = i \mid X_{t1} = i1, X_{t2} = i2, \ldots, X_{tk} = ik] = P[X_t = i \mid X_{tk} = ik]$$

Propriété “sans mémoire” :

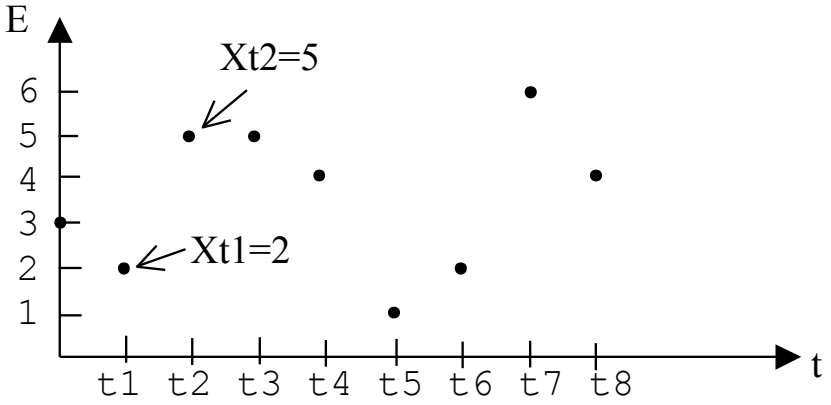
L'état présent étant connu, l'avenir et le passé sont indépendants.

Chaînes discrètes et continues :

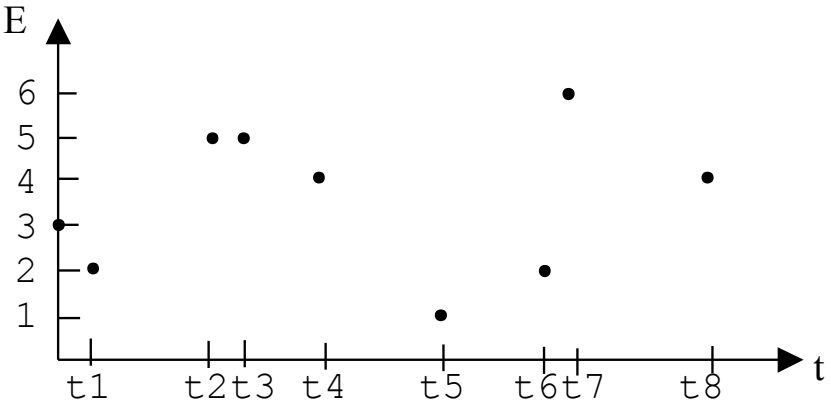
- Quand t est discret, chaîne de Markov à paramètre discret (notée CMD).
- Si t est continu, chaîne de Markov à paramètre continu (notée CMC).

Modélisation : CM pour décrire l'évolution d'un système à événements discrets

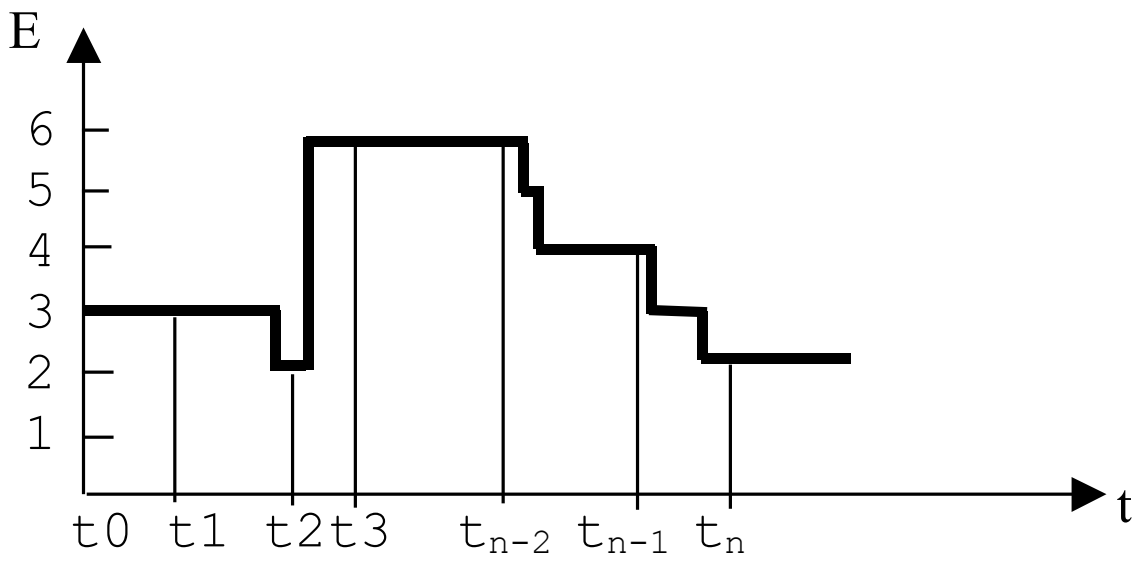
CMD à instants de changement d'état équidistants $tn = nT$:



CMD à instants de changement d'état quelconques :



Processus à espace d'état discret et à temps continu et CMC à des instants d'observation :



Exemples des différents types de processus stochastiques

	En temps discret : $n \in \boldsymbol{Z}$	*En temps continu : $t \in [0, +\infty]$*
Espace discret : $E \subset \boldsymbol{N}$	Nombre d'appels échangés suivant le jour de l'année : $\{A_n\}_{n=1, 2, \ldots, 365}$	Nombre de messages arrivant dans l'intervalle [0, t] : $\{N(t)\}_{t>0}$
Espace continu : $E \subset \boldsymbol{R}$	Temps moyen de traitement par rapport au jour de la semaine : $\{T_n\}_{n=1, 2, \ldots, 7}$	Temps d'attente d'un message arrivant à l'instant t : $\{W(t)\}_{t>0}$

Chaînes de Markov à paramètre Discret

Définition 1 : (Xn ; n∈ℕ) est une CMD ssi

$$P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0 = i_0] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}]$$

$$p_{ij}^{(m,n)} = P[X_n = j \mid X_m = i]$$

CMD est dite **homogène** si $P[X_n = j \mid X_m = i]$ ne dépend que de n-m pour i et j fixés :

$$p_{ij}^{(n)} = P[X_{n+m} = j \mid X_m = i]$$

Probabilité de transition en une étape :

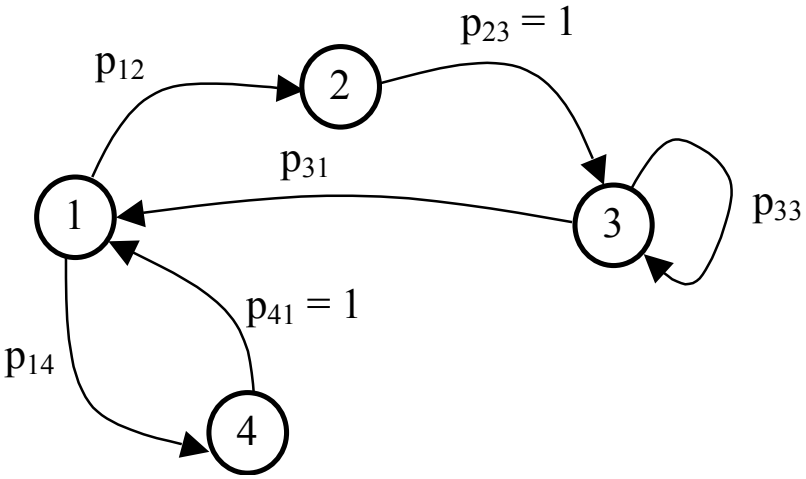
$$p_{ij} = p_{ij}^{(1)} = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Probabilité en sortant d'un état : $\sum_{j \in E} p_{ij} = 1$

Matrice de transition ($P = [p_{ij}]_{i, j \in E}$) :

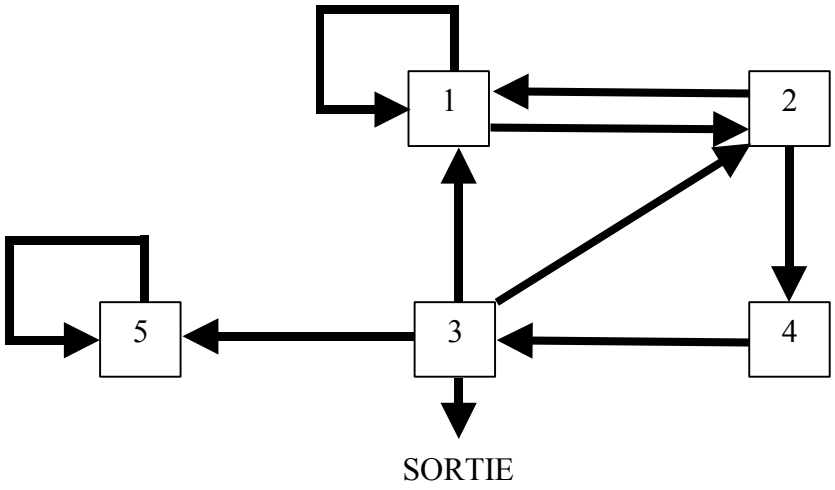
$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & . & . & . & p_{1j} & . & . & . \\ p_{21} & p_{22} & . & . & . & & & & \\ . & . & & & & & & & \\ . & . & & & & & & & \\ . & . & & & & & & & \\ p_{i1} & & & & & p_{ij} & & & \\ . & & & & & & . & & \\ . & & & & & & & . & \\ . & & & & & & & & . \end{bmatrix}$$

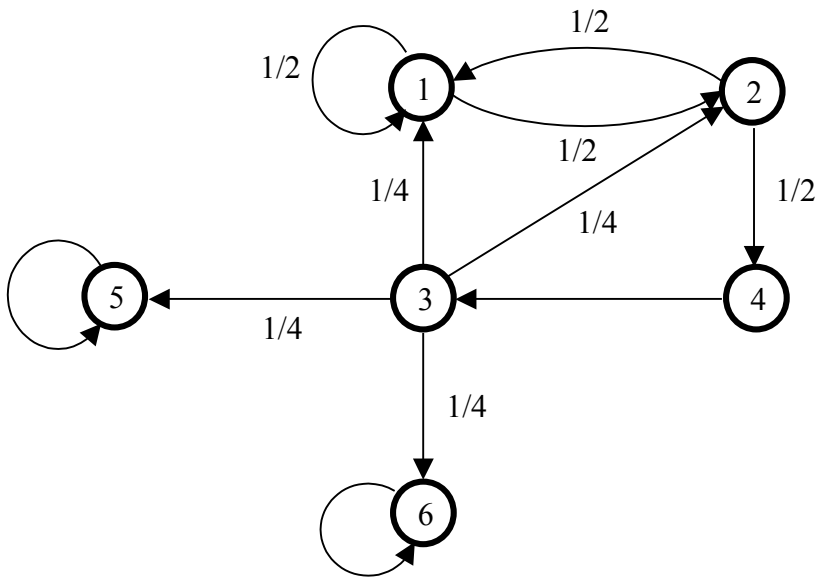
Exemple1 : une CMD avec E = {1, 2, 3, 4} et son graphe d'état-transition :



$$P = \begin{bmatrix} 0 & p_{12} & 0 & p_{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_{31} & 0 & p_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple 2 : une souris dans un labyrinthe





Etat initial : souris placée dans la pièce 2.

Questions :

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit à nouveau dans la pièce 2 après 4 déplacements ? ($\pi_2^{(4)} = 3/16$)
2. Combien de fois passera-t-elle en moyenne par la pièce 3 avant de sortir ou de tomber définitivement dans la pièce 5 ? ($R_{23} = 2$)
3. Quelle est la probabilité que la souris trouve un jour la sortie ? ($f_{26} = ½$)
4. Combien en moyenne fera-t-elle de déplacements pour revenir dans la pièce 2 ? ($M_2 = 5/2$)

Analyse : Régime transitoire et Régime permanent

Régime transitoire :

- Vecteur de probabilités d'états : $\pi^{(n)} = [\pi_j^{(n)}]_{j \in E} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, ...]$
- $\pi_j^{(n)} = P[X_n = j]$

Objectif de l'analayse:

décrire l'évolution du processus depuis l'état initial jusqu'à l'étape n, en passant par toutes les étapes intermédiaires

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j | X_{n-1} = i] P[X_{n-1} = i] = \sum_{i \in E} \pi_i^{(n-1)} p_{ij}$$

Forme matricielle:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P \quad \text{et} \quad \pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n$$

Une autre façon pour obtenir cette relation

Probabilité de transition en m étapes :

$$p_{ij}^{(m)} = P[X_{n+m} = j \mid X_n = i] \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

$$\pi_j^{(n)} = P[X_n = j] = \sum_{i \in E} P[X_n = j | X_0 = i] P[X_0 = i] = \sum_{i \in E} \pi_i^{(0)} p_{ij}^{(n)}$$

forme matricielle :

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^{(n)}$$

à montrer : $P^{(n)} = P^n$

Question 1 de **l'exemple 2**, on calcule $\pi_2^{(4)}$ sachant que $\pi_2^{(0)} = 1$.

$\pi^{(n)} = \pi^{(0)}P^{(n)}$
$\pi_2^{(4)} = \pi_2^{(0)}p_{22}^{(4)} = p_{22}^{(4)}$

3 chemins possibles :

- 2 → 4 → 3 → 1 → 2, avec probabilité : (1/2)(1)(1/4)(1/2) = 1/16
- 2 → 1 → 2 → 1 → 2, avec probabilité : (1/2)(1/2)(1/2)(1/2) = 1/16
- 2 → 1 → 1 → 1 → 2, avec probabilité : (1/2)(1/2)(1/2)(1/2) = 1/16

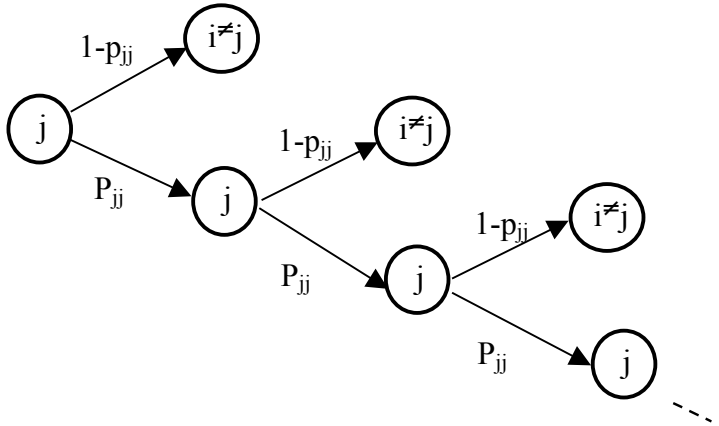
$\pi_2^{(4)} = p_{22}^{(4)} = 3/16$

Propriété 1 : Le temps (ou le nombre d'étapes) passé dans un état d'une CMD a une distribution géométrique.

Preuve : on s'intéresse au nombre d'étapes passées dans un certain état j.

Si $p_{jj} = 0$, on ne reste jamais dans l'état j.

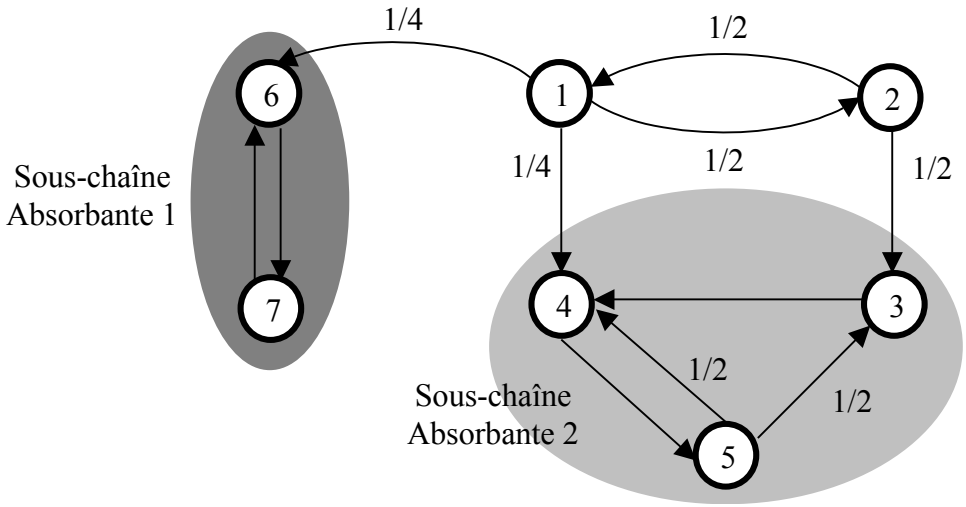
Si $p_{jj} \neq 0$, on a, à chaque étape, une probabilité p_{jj} de rester dans l'état j et une probabilité de $(1 - p_{jj})$ d'en sortir.



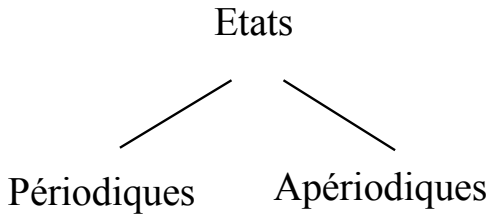
Distribution du nombre m d'étapes passées dans l'état j est donc donnée par : $(1 - p_{jj})\ p_{jj}^{m}$.

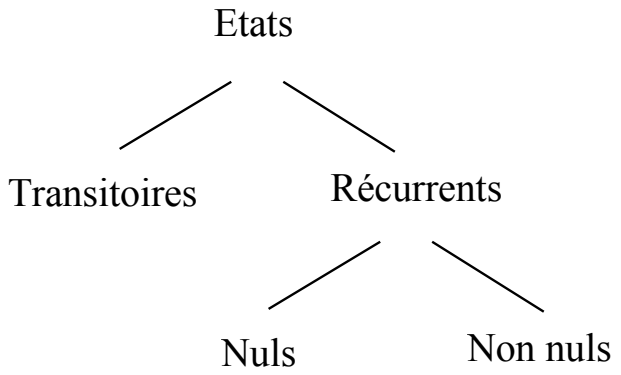
CMD est dite **irréductible** ssi de tout état i on peut atteindre tout état j (en un nombre fini d'étapes)

Exemple 3 : CMD réductible



Classification des états :





Un état j est **périodique** si on ne peut y revenir qu'après un nombre d'étapes multiple de k > 1

Dans l'exemple 3, état 6 est périodique de période = 2. Etat 4 est apériodique.

La période d'une CMD est égale au PGCD de la période de chacun de ses états. Une CMD est dite périodique si sa période est supérieure à 1.

La CMD de **l'exemple 3** est donc apériodique car son PGCD = 1.

Paramètres :

- $f_{jj}^{(n)}$ la probabilité que le premier retour en j ait lieu n étapes après l'avoir quitté.
- f_{jj} la probabilité de revenir en j après l'avoir quitté : $f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$.
- M_j le « temps » moyen de retour en j : $M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)}$.

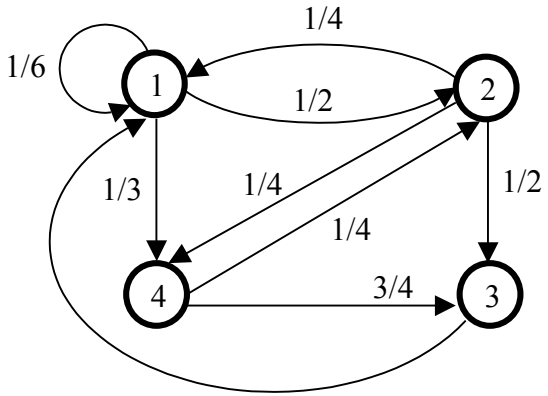
Un état j est dit :

- Transitoire si $f_{jj} < 1$
- Récurrent si $f_{jj} = 1$; de plus il est
  - Récurrent nul si $M_j = \infty$
  - Récurrent non nul si $M_j < \infty$

Pour **l'exemple 3** :

- Etat 1 est transitoire car $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = f_{11}^{(2)} = (1/2)(1/2) = ¼ < 1$. Notons que $f_{11}^{(4)} = 0$ car on retourne à l'état 1 pour la deuxième fois en 4 étapes. Par contre $p_{11}^{(4)} = 1/16$.
- Etat 6 est récurrent non nul car $f_{66} = f_{66}^{(2)} = 1$ et $M_6 = 2^* f_{66}^{(2)} = 2$
- Etat 3 est récurrent non nul car $f_{33} = f_{33}^{(3)} + f_{33}^{(5)} + f_{33}^{(7)} + \ldots = (½)^1 + (½)^2 + (½)^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^0 =$ 1 et $M_3 = 3*(½)^1 + 5*(½)^2 + 7*(½)^3 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n = 5$. Notons que $p_{33}^{(3)} = f_{33}^{(3)}$, $p_{33}^{(5)} = f_{33}^{(5)}$, $p_{33}^{(6)} = f_{33}^{(3)}*f_{33}^{(3)} = ¼$, … Mais $f_{33}^{(6)} = 0$

Exercice : Dans la CMD suivante, vérifier que $f_{11}^{(1)} = 1/6$, $f_{11}^{(2)} = 1/8$, $f_{11}^{(3)} = 25/48$, … Calculer $p_{11}^{(1)}$, $p_{11}^{(2)}$, $p_{11}^{(3)}$, … ainsi que f_{11}.



Propriété 3 : Tous les états d'une CMD irréductible finie sont récurrents non nuls.

$f_{ij}^{(n)}$ la probabilité d'aller de i à j en exactement n étapes (donc sans passer par l'état j de façon intermédiaire)

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij} \qquad \text{et} \qquad f_{ij}^{(n)} = \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \text{ pour } n > 1.$$

Pour répondre à la question 4 de **l'exemple 2** :
$f_{22}^{(1)} = p_{22} = 0$
$f_{22}^{(n)} = p_{21}\, f_{12}^{(n-1)} + p_{24}\, f_{42}^{(n-1)} = 0{,}5\, f_{12}^{(n-1)} + 0{,}5\, f_{42}^{(n-1)}$
Il faut réappliquer cette relation à $f_{12}^{(n-1)}$ et à $f_{42}^{(n-1)}$.

$M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)}$.

Exercice : montrer que $M_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{22}^{(n)} = 2{,}5$.

f_{ij} la probabilité d'aller de i en j en un nombre quelconque d'étapes (probabilité d'atteindre j en partant de i) : $f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$

Pour aller de i en j (en un nombre quelconque d'étapes), soit on y va directement (en une étape), soit on va à un état k différent de j et il reste à aller de k à j (en un nombre quelconque d'étapes) :

$$f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$

Pour répondre à la question 3 de **l'exemple 2** :

$f_{26} = p_{21}f_{16} + p_{24}f_{46} = 0,5f_{16} + 0,5f_{46}$

$f_{16} = p_{11}f_{16} + p_{12}f_{26} = 0,5f_{16} + 0,5f_{26}$ => $f_{16} = f_{26}$

$f_{46} = p_{43}f_{36} = f_{36}$

$f_{36} = p_{36} + p_{31}f_{16} + p_{32}f_{26} + p_{35}f_{56} = 0,25 + 0,25f_{16} + 0,25f_{26} + 0,25f_{56}$

L'état 5 étant absorbant: $f_{56} = 0$.

Finalement : $f_{26} = 0,5f_{26} + 0,5(0,25 + 0,5f_{26})$

$f_{26} = 0,5$

R_{ij} le nombre moyen de passage par l'état j sachant qu'on vient de l'état i :

$$R_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n \, P[\text{exactement n passage par j} \mid \text{état initial} = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n P_{ij}(n)$$

$$R_{ij} = f_{ij}(1 - f_{jj}) \sum_{n=1}^{\infty} n \, (f_{jj})^{n-1} = f_{ij}/(1 - f_{jj})$$

Pour répondre à la question 2 de **l'exemple 2** : $R_{23} = f_{23}/(1 - f_{33})$

$f_{23} = p_{21}f_{13} + p_{24}f_{43} = 0{,}5f_{13} + 0{,}5f_{43}$

$f_{13} = p_{11}f_{13} + p_{12}f_{23} = 0{,}5f_{13} + 0{,}5f_{23}$ => $f_{13} = f_{23}$

$f_{43} = p_{43} = 1$ => $f_{23} = 0{,}5f_{23} + 0{,}5$ => $f_{23} = 1$

$f_{33} = p_{31}f_{13} + p_{32}f_{23} = 0{,}5f_{13} + 0{,}25f_{23} = 0{,}5$

On a donc $R_{23} = 2$.

Régime permanent

On s'intéresse à la limite lorsque n tend vers l'infini du vecteur des probabilités $\pi^{(n)}$

Dans une CMD irréductible et apériodique le vecteur π des probabilités limites $\pi_j = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{(n)}$ existe toujours et est indépendant de la distribution des probabilités initiales $\pi^{(0)}$.

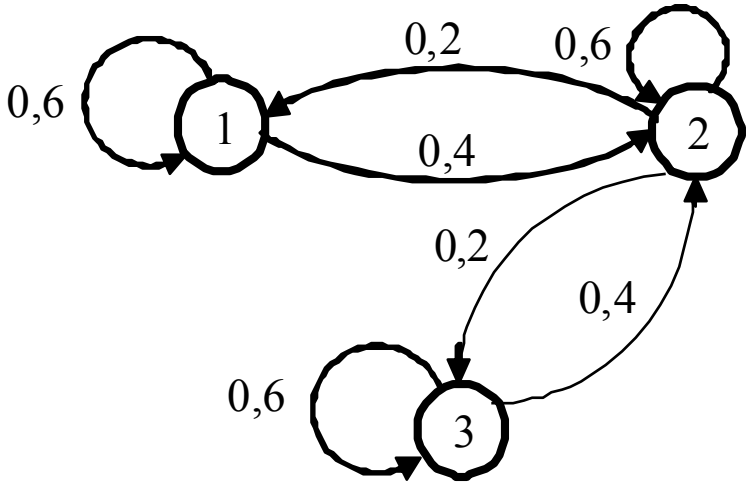
$$\pi_j = \sum_{i\in E} \pi_i p_{ij} \quad \text{pour tout } j \in E$$

$$\sum_{i\in E} \pi_i = 1$$

Pour tout état j, flux sortant de l'état j = flux entrant dans l'état j

$\boldsymbol{\pi = \pi P}$ correspond bien au passage à la limite sur le système d'équations liant les probabilités transitoires $\boldsymbol{\pi^{(n)} = \pi^{(n-1)} P}$

Exemple : Considérons la CMD suivante :



$$P = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

C'est une CMD finie, irréductible et apériodique. Tous ses états sont récurrents non nuls, que la limite, lorsque n tend vers l'infinie de $\boldsymbol{\pi}^{(n)}$ existe, est indépendante de $\boldsymbol{\pi}^{(0)}$ et est de solution du système d'équations suivant :

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$$
$$\boldsymbol{\pi}_1+\boldsymbol{\pi}_2+\boldsymbol{\pi}_3 = \mathbf{1}$$

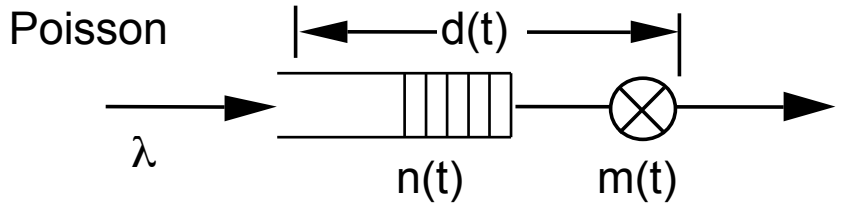
Avec la solution : $\boldsymbol{\pi}$ = **[0,25 0,5 0,25].**

Calcul itératif en appliquant $\boldsymbol{\pi}^{(n)} = \boldsymbol{\pi}^{(n-1)}\mathbf{P}$.

$\pi^{(0)}$	[1 0 0]	[0 1 0]	[0 0 1]
$\pi^{(1)}$	[0.60000 0.40000 0.00000]	[0.20000 0.60000 0.20000]	[0.00000 0.40000 0.60000]
$\pi^{(2)}$	[0.44000 0.48000 0.08000]	[0.24000 0.52000 0.24000]	[0.08000 0.48000 0.44000]
$\pi^{(3)}$	[0.36000 0.49600 0.14400]	[0.24800 0.50400 0.24800]	[0.14400 0.49600 0.36000]
$\pi^{(4)}$	[0.31520 0.49920 0.18560]	[0.24960 0.50080 0.24960]	[0.18560 0.49920 0.31520]
$\pi^{(5)}$	[0.28896 0.49984 0.21120]	[0.24992 0.50016 0.24992]	[0.21120 0.49984 0.28896]
$\pi^{(6)}$	[0.27334 0.49997 0.22669]	[0.24998 0.50003 0.24998]	[0.22669 0.49997 0.27334]
$\pi^{(7)}$	[0.26400 0.49999 0.23601]	[0.25000 0.50001 0.25000]	[0.23601 0.49999 0.26400]
$\pi^{(8)}$	[0.25840 0.50000 0.24160]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24160 0.50000 0.25840]
$\pi^{(9)}$	[0.25504 0.50000 0.24496]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24496 0.50000 0.25504]
$\pi^{(10)}$	[0.25302 0.50000 0.24698]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24698 0.50000 0.25302]
$\pi^{(11)}$	[0.25181 0.50000 0.24819]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24819 0.50000 0.25181]
$\pi^{(12)}$	[0.25109 0.50000 0.24891]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24891 0.50000 0.25109]
$\pi^{(13)}$	[0.25065 0.50000 0.24935]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24935 0.50000 0.25065]
$\pi^{(14)}$	[0.25039 0.50000 0.24961]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24961 0.50000 0.25039]
$\pi^{(15)}$	[0.25024 0.50000 0.24976]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24976 0.50000 0.25024]
$\pi^{(16)}$	[0.25014 0.50000 0.24986]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24986 0.50000 0.25014]
$\pi^{(17)}$	[0.25008 0.50000 0.24992]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24992 0.50000 0.25008]
$\pi^{(18)}$	[0.25005 0.50000 0.24995]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24995 0.50000 0.25005]
$\pi^{(19)}$	[0.25003 0.50000 0.24997]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24997 0.50000 0.25003]
$\pi^{(20)}$	[0.25002 0.50000 0.24998]	[0.25000 0.50000 0.25000]	[0.24998 0.50000 0.25002]

Convergence vers le vecteur limite est assez rapide dans la pratique

M/G/1



Flux d'arrivée Poisson :

$$P_k(t) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

Remarque : peut aussi suivre un autre processus Markovien.

Distribution du temps de service :

$$M(t) = P[\text{Temps de service} \leq t]$$

et sa fonction de densité :

$$m(t) = dM(t)/dt$$

et le temps moyen de service :

$$\overline{m} = \int_0^\infty t\,m(t)\,dt$$

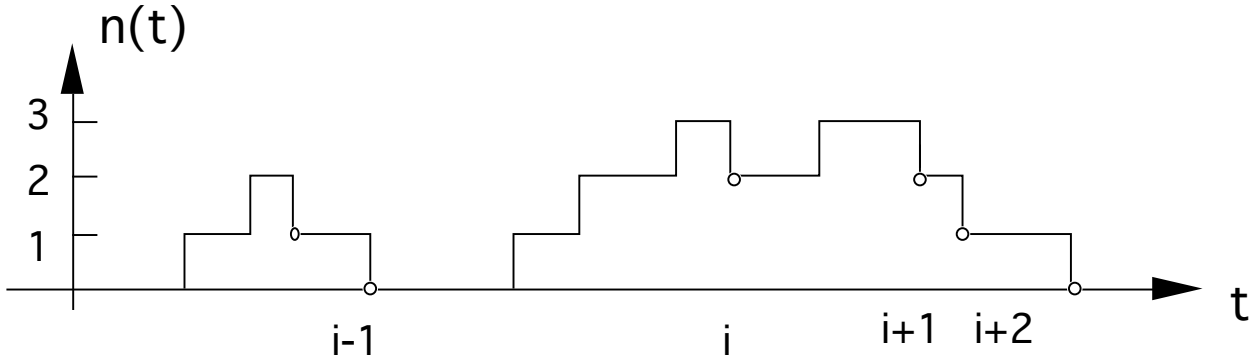
Chaîne de Markov induite (Embedded)

Choisir à la fois **une suite des instants** dans le temps pendant l'évolution d'un processus et **un état** de sorte que la chaîne de Markov se forme

A des instants t1 ≤ t2 ≤ ... ≤ ti, ... on observe les variables d'état correspondantes S1, S2, ..., Si

$$P[S_N = l_N \mid S_1 = l_1, S_2 = l_2, ..., S_{N-1} = l_{N-1}] = P[S_N = l_N \mid S_{N-1} = l_{N-1}]$$

Nombre de clients dans M/G/1 forme une chaîne de Markov induite à des instants où un client quitte le système



- n_i : nombre de clients dans le système (ceux dans la file + celui dans le serveur) aux points d'observation (instants où un client quitte le système),
- a_i : nombre de clients arrivés **durant le temps de service d'un client**.

$$n_{i+1} = n_i - U(n_i) + a_{i+1} \qquad (1)$$

$$U(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$$

Le nombre de clients à l'instant i+1 ne dépend que de celui de l'instant i et les nouvelles arrivées

n_i a une distribution stationnaire ssi $\rho = \lambda \overline{m} < 1$.

$$\pi(k) = \lim_{i \to \infty} P[n_i = k]$$

$$\lim_{i \to \infty} E[n_{i+1}] = \lim_{i \to \infty} E[n_i] = \overline{n} \qquad (2)$$

Prenons l'espérance de chaque côté de (1) et d'après (2), on a :

$$E[U(n_i)] = E[a_{i+1}] \qquad (3)$$

$$E[a_{i+1}] = \int_0^\infty E[a_{i+1} | MessageLength = t]m(t)dt$$
$$= \int_0^\infty \lambda t m(t)dt = \lambda \int_0^\infty t m(t)dt = \lambda \overline{m} = \rho$$

$$E[U(n_i)] = P[n_i > 0] = 1 - P_0$$

D'après (3), on a :

$$P_0 = 1 - \rho \qquad (4)$$

Approche par la fonction génératrice de n_i

$$n_{i+1} = n_i - U(n_i) + a_{i+1} \qquad (1)$$

induit une chaine de Markov infinie. $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\mathbf{P}$ n'est pas pratique pour obtenir la distribution stationnaire $\boldsymbol{\pi}$ du nombre de clients dans le système.

La fonction génératrice de $\{n_i\}$ est la transformé en Z de sa fonction de densité qui est définie par :

$$P_i(z) = E[z^{n_i}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k P[n_i = k]$$

De l'équation 1, on a:

$$P_{i+1}(z) = E[z^{n_i - U(n_i) + a_{i+1}}]$$

Comme a_i et n_i sont indépendants, on a alors :

$$P_{i+1}(z) = E[z^{n_i - U(n_i)}]E[z^{a_{i+1}}] = E[z^{n_i - U(n_i)}]A(z) \qquad (5)$$

où $A(z) = E[z^{a_i}]$ est indépendant de l'indice i grâce à la stationnarité.

Pour le terme qui reste, par la définition de la fonction génératrice, on a :

$$E[z^{n_i - U(n_i)}] = \sum_{k=0}^{\infty} z^{k - U(k)} P[n_i = k]$$

Comme on peut écrire :

$$E[z^{n_i - U(n_i)}] = P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} P[n_i = k] = P_0 + z^{-1}(\sum_{k=0}^{\infty} z^k P[n_i = k] - P_0)$$

On a alors :

$$E[z^{n_i - U(n_i)}] = P_0 + z^{-1}(P_i(z) - P_0) \qquad (6)$$

De (5) et (6) on a :

$$P_{i+1}(z) = [P_0 + z^{-1}(P_i(z) - P_0)]A(z)$$

Supposons que la solution stationnaire existe :

$$\lim_{i \to \infty} P_{i+1}(z) = \lim_{i \to \infty} P_i(z) = P(z)$$

on a la f.g. de n_i sous forme générale :

$$P(z) = \frac{P_0(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

Dans le cas du flux d'arrivée de Poisson (ou plus généralement Markovien), on a $P_0 = 1 - \rho$.
Ce qui nous donne finalement :

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z} \qquad (7)$$

Nombre moyen de clients dans la file M/G/1

$$\bar{n} = P'(z)\Big|_{z=1}$$

La dérivée de l'équation 7 donne :

$$P'(z)[A(z) - z] + P(z)[A'(z) - 1] = (1 - \rho)(-1)A(z) + (1 - \rho)(1 - z)A'(z)$$

En dérivant encore une fois (règle de L'Hôpital), on obtient :

$$P''(z)[A(z) - z] + 2P'(z)[A'(z) - 1] + P(z)A''(z) = 2(1 - \rho)(-1)A'(z) + (1 - \rho)(1 - z)A''(z)$$

Avec z = 1 et comme A(1) = P(1) = 1, on a :

$$\bar{n} = P'(1) = \frac{(1-\rho)A'(1)}{1 - A'(1)} + \frac{A''(1)}{2(1 - A'(1))}$$

$$A(z) = E[z^a] = \int_0^\infty E[z^a \,|\, durée_transmission = t]\, m(t)\, dt$$

$$A(z) = \int_0^\infty \sum_{n=0}^\infty z^n \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} m(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} m(t)\, dt = \mathsf{M}\,(\lambda(1-z)) \qquad (8)$$

où M(s) est la transformé de Laplace de m(t).

$$A'(z)\Big|_{z=1} = -\lambda \mathsf{M}'(0) = \lambda \overline{m} = \rho$$

$$A''(z)\Big|_{z=1} = \lambda^2 \mathsf{M}''(0) = \lambda^2 \overline{m^2}$$

Finalement :

$$\overline{n} = \rho + \frac{\lambda^2 \overline{m^2}}{2(1-\rho)} \qquad (9)$$

Temps de séjour de client *d(t)*

Grâce aux arrivées de Poisson, et en imaginant une nouvelle CMD aux instants distribués selon *d(t)*, on a :

$$P(z) = E[z^n] = \int_0^\infty E[z^n | délai = t] d(t) dt$$

$$P(z) = \int_0^\infty [\sum_{n=0}^\infty \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} z^n] d(t) dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t(1-z)} d(t) dt = D(\lambda(1-z))$$

La transformé de Laplace de *d(t)* est donc :

$$D(s) = s(1-\rho)M(s)/[s-\lambda+\lambda M(s)] \qquad (10)$$

La transformé inverse de Laplace nous donne la distribution de *d(t)*.

Le temps moyen de séjour d'un client peut être obtenu soit en dérivant l'équation 10 soit en appliquant la formule de Little :

$$\bar{d} = \frac{\bar{n}}{\lambda} = \bar{m} + \frac{\lambda \overline{m^2}}{2(1-\rho)} \qquad (11)$$

C'est la formule de Pollaczek-Khinchin.

On remarque que cette équation est liée à celle de 9 par la formule de Little
(peut être considérée comme une sorte de démonstration de la formule de Little).

Cas particulier : M/M/1

Pour un temps de service exponentiel de paramètre μ, $m(t) = \mu e^{-\mu t}$ et

$$\mathsf{M}(s) = E[e^{-sM}] = \int_0^\infty e^{-st}[\mu e^{-\mu t}]dt = \frac{\mu}{\mu + s} \qquad (12)$$

En remplaçant *s* par *λ(1-z)* on a :

$$A(z) = \frac{\mu}{\mu - \lambda(z-1)}$$

et :

$$A'(z)\Big|_{z=1} = \frac{\lambda\mu}{[\mu - \lambda(z-1)]^2}\Big|_{z=1} = \lambda\overline{m} = \lambda\frac{1}{\mu} = \rho$$

$$A''(z)\Big|_{z=1} = \frac{2\lambda\mu}{[\mu - \lambda(z-1)]^3}\Big|_{z=1} = \lambda^2\overline{m^2} = 2\rho^2$$

Selon l'équation 10 et 12, la transformé de Laplace de délai est :

$$D(s) = (\mu - \lambda)/(s + \mu - \lambda)$$

$$\bar{d} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

$$P(z) = (1-\rho)/(1-\rho z)$$

$$\bar{n} = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

Cas particulier : M/D/1

Pour un temps de service constant (ou déterministe), $E[m(t)] = \overline{m}$, et

$$m(t) = \begin{cases} \delta(t), t = \overline{m} \\ 0, ailleurs \end{cases}$$

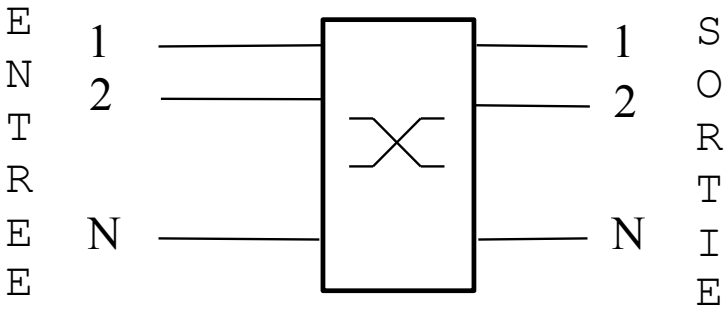
$$M(s) = \int_0^\infty m(t) e^{-st} dt = e^{-s\overline{m}}$$

$$P(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)e^{\rho(z-1)}}{z - e^{\rho(z-1)}}$$

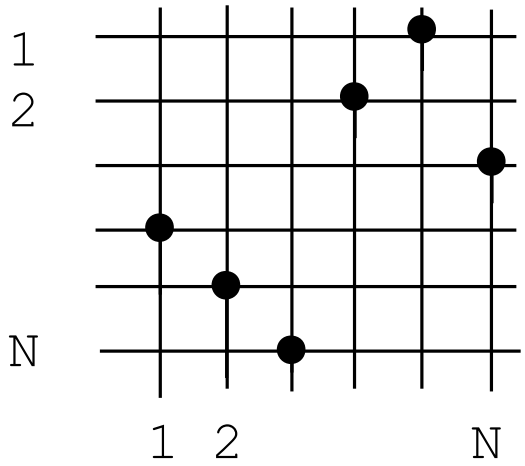
$$D(s) = \frac{s(1-\rho)e^{-s\overline{m}}}{s - \lambda + \lambda e^{-s\overline{m}}}$$

$$\overline{n} = \frac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)} \qquad \text{et} \qquad \overline{d} = \frac{\overline{m}(2-\rho)}{2(1-\rho)}$$

Modèles de commutateur

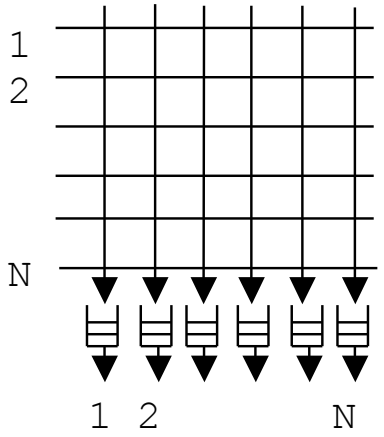


« Cross-bar » NxN

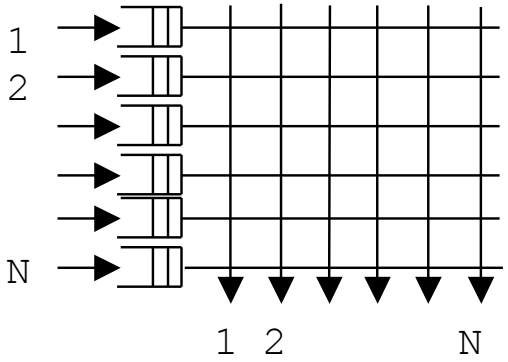


Commutateur non bloquant (avec mémoire tampon)

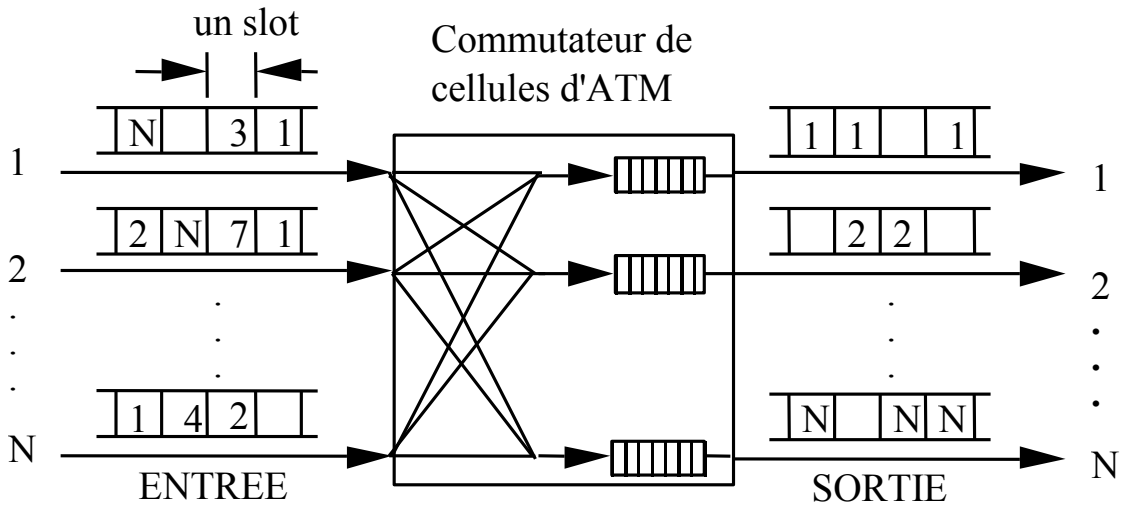
Buffers à la sortie



Buffers à l'entrée



Evaluation de performances d'un commutateur ATM



Hypothèse :

- Arrivée Bernoulli avec *p* cellules par entrée et par slot.
- Probabilité *1/N* pour une destination donnée.

Modèle :

nombre de cellules à la fin de chaque slot juste après le départ d'une cellule :

$$Q_{m+1} = max\ (0,\ Q_m + A_{m+1} - 1)$$

nombre de cellules dans la file à la fin du $m^{\text{ième}}$ slot juste avant le départ d'une cellule :

$$X_{m+1} = X_m + A_{m+1} - u(X_m)$$

$$Q_m = X_m - u(X_m)$$

Distribution du nombre de cellules arrivées dans la file durant le $m^{\text{ième}}$ slot (distribution Binomiale) est la même que durant n'importe quel autre (on supprime ainsi l'indice m de A_m) :

$$a_i = \Pr ob[A=i] = \binom{N}{i}\left(\frac{p}{N}\right)^i\left(1-\frac{p}{N}\right)^{N-i}$$

et sa f.g. :

$$A(z) = \sum_{i=0}^{N} z^i a_i = \left(1-\frac{p}{N}+z\frac{p}{N}\right)^N$$

cellules arrivées dans chaque buffer durant 1 slot (une unité de temps) :

1.1 Np/ N = p

Charge de chaque buffer :

ρ = taux d'arrivés x durée de service = px1 = p

f.g. de X notée P(z) :

$$P(z)=\frac{(1-\rho)(1-z)A(z)}{A(z)-z}$$

Et $P_0 = P[X_m = 0] = 1 - \rho = 1 - p$

Avec $Q_m = X_m - u(X_m)$, on a :

$$\begin{aligned} Q(z) &= E[z^{Qm}] = E[z^{Xm - u(Xm)}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{k-u(k)} P[Xm=k] \\ &= P_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z^{(k-1)} P[Xm = k] \\ &= P_0 + z^{-1}[P(z) - P_0] \end{aligned}$$

En substituant P(z) et $\rho = p$, on a alors :

$$Q(z)=\frac{(1-p)(1-z)}{A(z)-z}$$

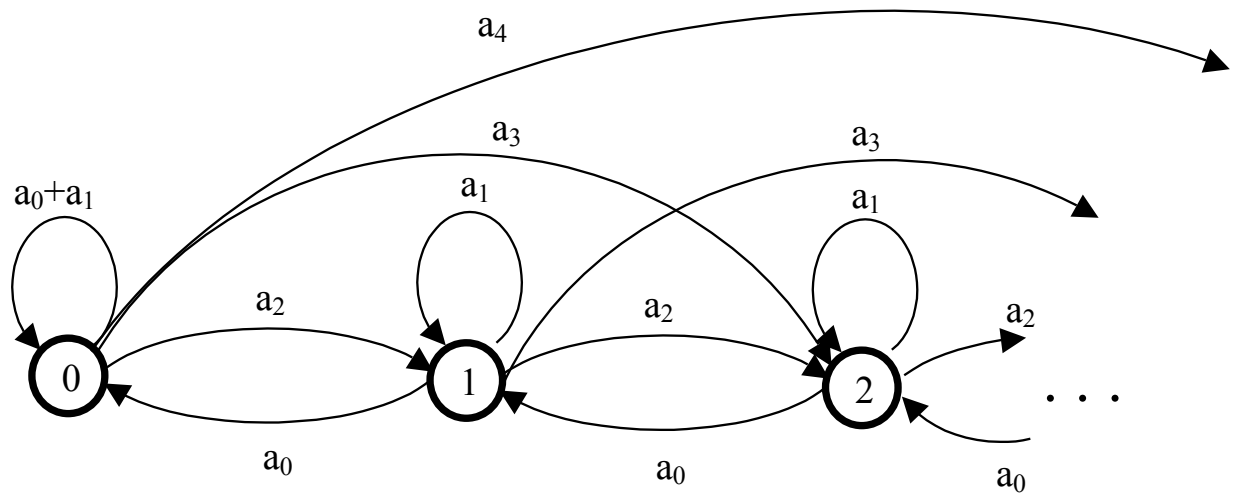


Figure : *Graphe de probabilité de transition de Q*

$$p_0 = P[Q = 0] = \frac{1 - p}{a_0}$$

$$p_1 = P[Q = 1] = \frac{1 - a_0 - a_1}{a_0} p_0$$

…

$$p_n = P[Q = n] = \frac{1 - a_1}{a_0} p_{n-1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_i}{a_0} p_{n-i} \quad \text{pour n} \geq 2$$

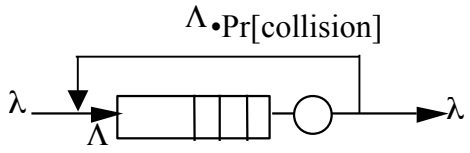
P[Q=0] $\neq$ *P[X=0] = 1 – p* car ces deux distributions sont liées par:

$$P[Q = k] = \begin{cases} P[X = 0] + P[X = 1], k = 0 \\ P[X = k + 1], k > 0 \end{cases}$$

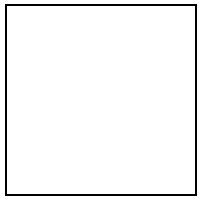
Protocoles d'accès aléatoire (MAC) et CSMA/xx

Aloha : on émet quand on désir, on réémet quand collision

- messages de taille constante *l* dont la durée de transmission est *m* (avec *l = m*Débit*).
- flux d'arrivée de messages suit une loi Poissonnienne avec un taux λ messages/seconde. $P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$
- file d'attente de chaque station est de capacité 1 et le nombre de stations est infini.



$P[\text{collision}] = 1 - e^{-2\Lambda m}$

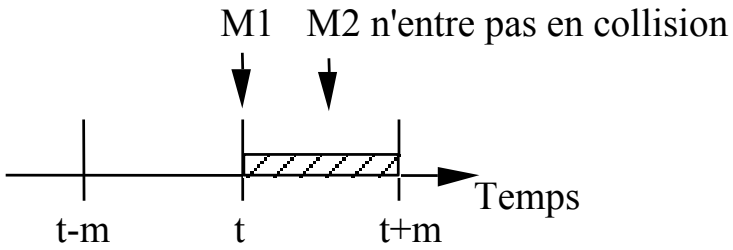


$\Lambda = \lambda + \Lambda(1 - e^{-2\Lambda m})$

- le rendement $\rho = \lambda m$
- la charge du médium $R = \Lambda m$

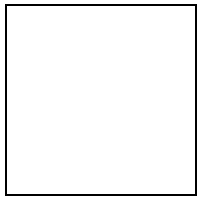
$$\rho = Re^{-2R}$$

Aloha segmenté : on émet ou réémet qu'au début des tranches de temps



$P[collision] = 1 - e^{-\Lambda m}$

$\rho = Re^{-R}$



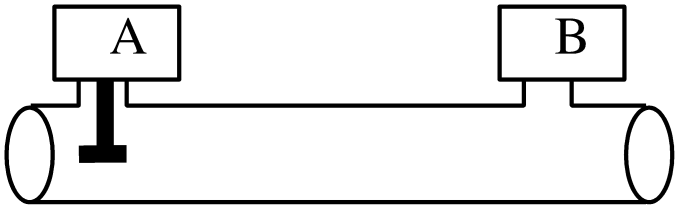
CSMA (Carry Sense Multiple Access) : si on a une trame à transmettre, on écoute le médium avant d'émettre, on émet ou réémet lors qu'on entend un silence

CSMA/CD (Carry Sense Multiple Access with Collision Detection) : une station qui a détecté une collision interrompt son émission et réémet après un temps d'ajournement aléatoire (calculé

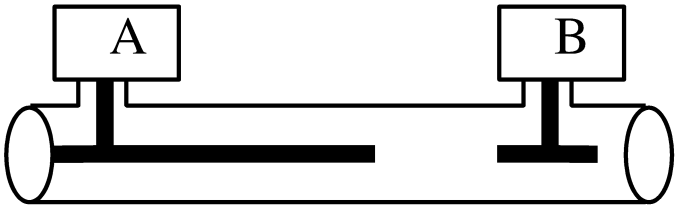
selon l'algorithme BEB). Une station n'écoute pas le médium si elle n'a pas de trames à transmettre ou n'écoute plus le médium après la fin de transmission de ses trames

- Collisions encore possibles si deux ou plusieurs stations émettent en même temps (ou dans une fenêtre temporelle Tmax à cause du délai de propagation)
- Une taille minimale de trame est nécessaire afin que la station émettrice puisse toujours détecter une collision sur la trame qu'elle est en train d'émettre
- Pour éviter « re-collision », Réémission après un délai R*Tmax avec R tiré aléatoirement entre 0 et 2**K ; K = min(nb_réémission, 10) → BEB (Binary Exponential Backoff)

Cas 1 : Collision non détectée



instant To (A commence à émettre)



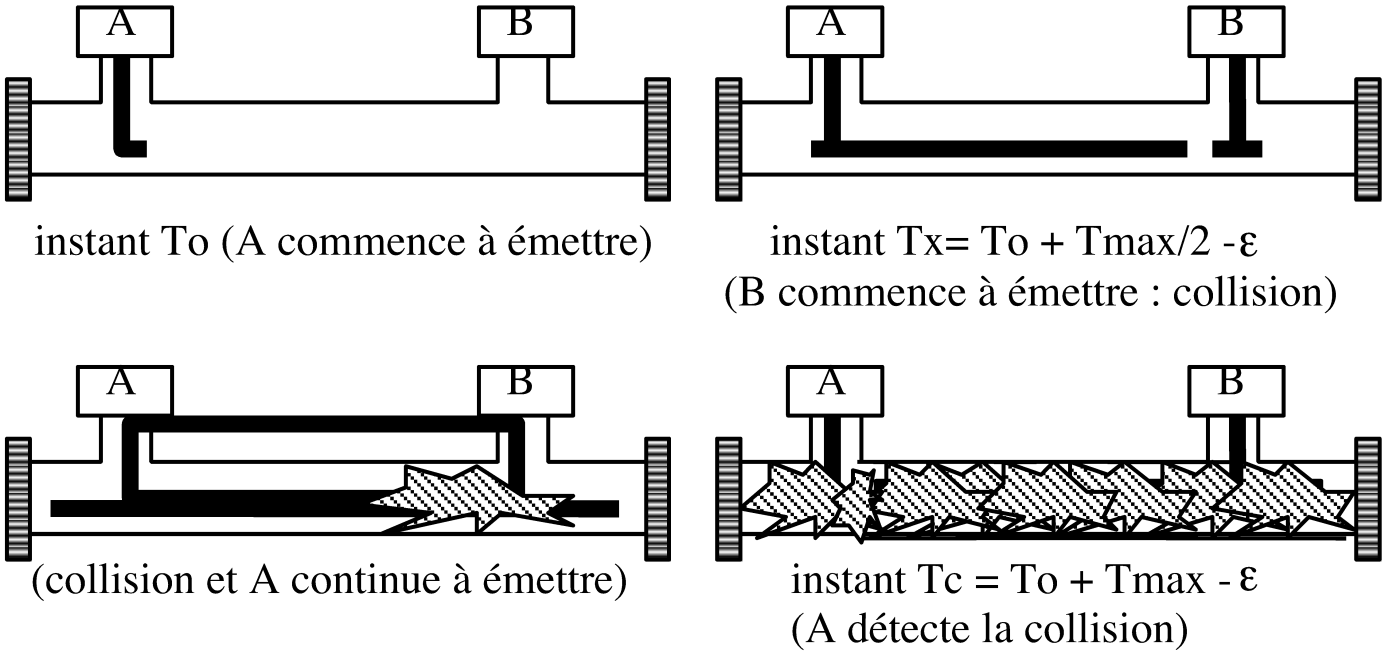
instant Tx (B commence à émettre)

instant To+t1 (A termine d'émettre)

instant to + t1 + dt
(collision, mais A n'écoute plus)

[extrait de Mameri&thomesse]

Cas 2 : Collision détectée



instant To (A commence à émettre)

instant Tx= To + Tmax/2 -ε
(B commence à émettre : collision)

(collision et A continue à émettre)

instant Tc = To + Tmax - ε
(A détecte la collision)

[extrait de Mameri&thomesse]

Relation entre Débit D, temps maximal d'un aller-retour du signal (délai de propagation) entre deux stations Tmax et taille minimale de trame Lmin :

$$L_{min} \geq D * T_{max}$$