Examen DEA ARAVIS 98-99 : géométrie algorithmique
9 à 11h, 26 février 1999

Complément

Le théorème suivant pourra être utilisé:

Théorème : Étant donné deux ensembles de nombres réels A et B, déterminer si $A \cap B = \emptyset$ nécessite au moins $\Omega(n \log n)$ opérations, où $|A| = |B| = n$.

Rq: c'est le *set disjointness problem.*

1 Exercice 1: Perçabilité

On dit qu'un ensemble de n objets $\mathcal{P} = \{P_i; 1 \leq i \leq n\}$ est k-perçable si il existe k points $q_1 \ldots q_k$ tel que chaque objet P_i contienne au moins un des points q_j.

-a– Proposer un algorithme pour déterminer si un ensemble d'intervalles réels est 1-perçable, 2-perçable. Donner les complexités.

On va étudier la 2-perçabilité d'un ensemble de rectangles à cotés parallèles aux axes dans le plan.

-b– Proposer un algorithme pour déterminer si un ensemble $\mathcal{P}$ de n rectangles est 1-perçable. Donner sa complexité.

-c– Si l'ensemble n'est pas 1-perçable, quelle est la taille minimale d'un sous-ensemble de $\mathcal{P}$ qui ne soit pas 1-perçable.

-d– Déterminer un tel ensemble minimal $\mathcal{C}$ (algorithme et complexité).

-e– $\mathcal{C}$ étant déterminé, séparer $\mathcal{P}$ en
$\mathcal{P}_1$ un ensemble de rectangles ne pouvant pas être percé par q_2,
$\mathcal{P}_2$ un ensemble de rectangles ne pouvant pas être percé par q_1,
$\mathcal{P}_3$ un ensemble de rectangles ne pouvant pas être percé ni par q_1 ni par q_2,
$\mathcal{P}_4$ le reste des rectangles.

-f– Choisir (bien) un rectangle de $\mathcal{P}_4$, faire l'hypothèse qu'il est percé par q_1. Trouver la place optimale pour q_1.

-g– Conclure. (Algorithme permettant de déterminer la 2-perçabilité de $\mathcal{P}$ et sa complexité.)

2 Exercice 2: Prédicat, Précision numérique

Étant donné le prédicat géométrique suivant : «le segment pq coupe-t-il le segment rs ?»

-a– Est-il nécessaire, souhaitable, de calculer le point d'intersection pour évaluer la réponse ?

-b– Ce prédicat se réduit il à des tests d'orientation de triangles ?

-c– Si oui combien ? Est-il possible de réduire ce nombre à l'aide d'autres prédicats ?

-c'– Si non pourquoi ?

-d– Proposez une méthode d'évaluation de ce prédicat.

3 Exercice 3: k plus proches voisins

Étant donné $\mathcal{S}$ un ensemble de n points dans le plan, on cherche à connaître les k plus proches voisins dans $\mathcal{S}$ de tout point de $\mathcal{S}$. Si on relie chaque point à ces k plus proches voisins on obtient le graphe des k plus proches voisins.

-a– Montrer que le graphe des plus proches voisins ($k = 1$) est un sous graphe de Delaunay.

-b– Proposer un algorithme de calcul du graphe des plus proches voisins, complexité, borne inférieure.

-c– Si q_i est le $i$ème plus proche voisin de q_0 alors montrer que $\forall i \geq 1 \exists j < i q_i q_j$ est de Delaunay.

-d– Est-il possible de déduire le graphe des k plus proches voisins de Delaunay ? (algorithme, complexité).

4 Exercice 4: Union de sphères

On considère n cercles de centres p_i et de même rayon r et on se propose de calculer l'union de ces cercles.

-a– Combien y a-t-il de points d'intersection dans l'arrangement des n cercles ?

-b– A quelle condition un point q du plan (par exemple un point d'intersection) est-il à l'intérieur de l'union ?

-c– Combien de points d'intersection entre les cercles apparaissent sur le bord de l'union des cercles ?

-d– Proposer un algorithme de calcul de l'union des cercles et étudier sa complexité.