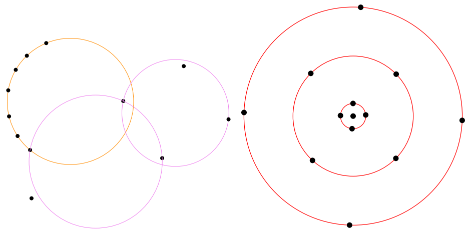
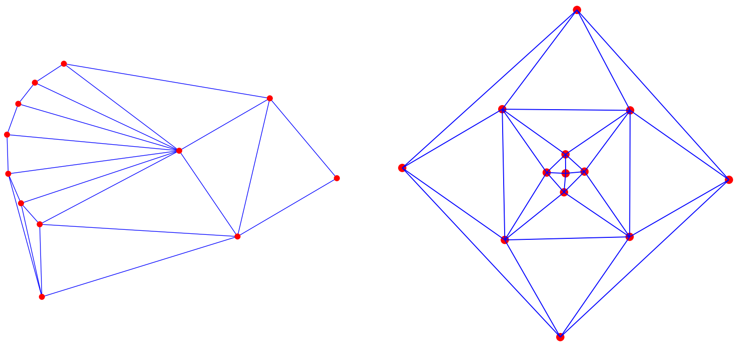
Examen 27 janvier 2022

1 Dessiner la triangulation de Delaunay



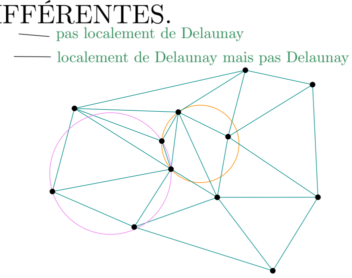
des deux ensembles de points sur la feuille jointe.

1 Correction:

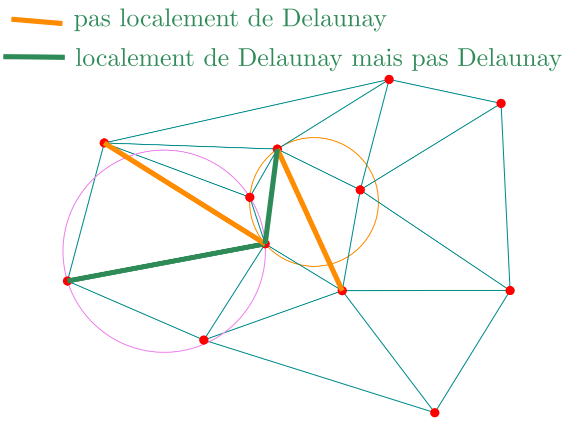


2 Triangulation localement de Delaunay

Mettre en évidence les arêtes **non localement** de Delaunay et les arêtes **localement de Delaunay mais pas de Delaunay** dans la triangulation sur la feuille jointe. DE DEUX MANIÈRES DIFFÉRENTES.



2 Correction:



3 Voisins communs à deux sommets dans une triangulation

Soit S un ensemble de n poinst dans le plan et T une triangulation de S. Pour $u, v \in S$, on note $\delta_{u,v}$ le nombre maximum de points de S qui sont voisins dans T de u et de v simultanément.

3.1 Deux sommets

On donne deux points $u, v \in S$. Quel est la valeur maximale de $\delta_{u,v}$? Dessiner un exemple pour montrer que la borne est atteinte (avec $n = 10$).

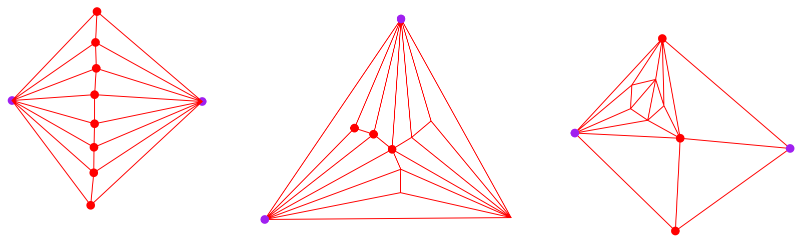
3.2 Trois sommets

On donne trois points $u, v, w \in S$, et on suppose que l'enveloppe convexe de S est le triangle uvw. Quel est la valeur maximale de $\delta_3 = \min(\delta_{u,v}, \delta_{v,w}, \delta_{u,w})$? Dessiner un exemple pour montrer que la borne est atteinte (avec $n = 10$).

3.3 Quatre sommets

On donne quatre points $u, v, w, x \in S$, et on suppose que l'enveloppe convexe de S est le quadrilatère $uvwx$. Quel est la valeur maximale de $\delta_4 = \min(\delta_{u,v}, \delta_{v,w}, \delta_{w,x}, \delta_{x,u}, \delta_{u,w}, \delta_{v,x})$? Dessiner un exemple pour montrer que la borne est atteinte (avec $n = 10$).

3 Correction:



3.1 Deux sommets

$\delta_{u,v} = n - 2$ est facile à faire, et on ne peut évidemment pas faire plus.

3.2 Trois sommets

Supposons que u, v et w aient un voisin commun α alors un point de $S \setminus \{u, v, w, \alpha\}$ ne peut être voisin que pour une des trois paires (u, v), (u, w) et (v, w). On a donc $(\delta_{u,v} - 1) + (\delta_{v,w} - 1) + (\delta_{u,w} - 1) \leq n - 4$.

Et donc $\min(\delta_{u,v}, \delta_{v,w}, \delta_{u,w}) \leq \frac{\delta_{u,v}+\delta_{v,w}+\delta_{u,w}}{3} \leq \frac{n-1}{3}$.

Si il n'y a pas de voisin commun, alors on a $\delta_{u,v} + \delta_{v,w} + \delta_{u,w} \leq n - 3$ et on obtient une borne plus petite.

3.3 Quatre sommets

Si u et w ont un voisin commun $\alpha \notin \{v, x\}$, et v et x ont un voisin commun $\beta \notin \{u, w\}$, la seule possibilité pour que les chemins $u\alpha w$ et $v\beta x$ qui relient des coins opposées du quadrilatère convexe $uvwx$ se croise en des sommets est $\alpha = \beta$. On a alors $\delta_4 = \delta_{u,v} = Card\{v, \alpha, x\} = 3$.

Si u et w n'ont pas un voisin commun $\alpha \notin \{v, x\}$: $\delta_{u,w} = 2$. Si v et x n'ont pas un voisin commun $\beta \notin \{u, w\}$: $\delta_{v,x} = 2$.

4 Graphe de Gabriel

Soit S un ensemble de n points dans le plan, On rappelle que dans le graphe de Gabriel, deux points p et q sont voisins si le disque de diamètre pq est vide.

4.1 Maximum

Quel est le degré maximal d'un sommet du graphe de Gabriel ? Dessiner un exemple ($n = 10$).

4.2 Minimum

Quel est le degré minimal d'un sommet du graphe de Gabriel ? Dessiner un exemple ($n = 10$).

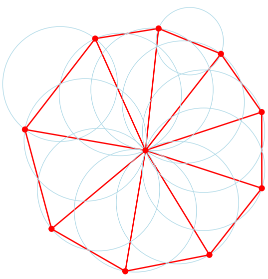
4.3 Poisson

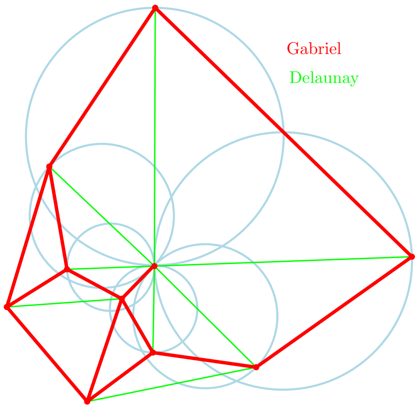
Maintenent l'ensemble des points est un processus de Poisson d'intensité 1 auquel on ajoute l'origine, quel est l'espérance du nombre de voisin de l'origine ?

Pour une constante $\alpha > 0$, on donne:

$$\int e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\alpha}}; \qquad \int e^{-\alpha r^2} r dr = \frac{1}{2\alpha}; \qquad \int e^{-\alpha r^2} r^2 dr = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha\sqrt{\alpha}}.$$

4 Correction:





4.1 Maximum

Soit u et $n-1$ points bien réparti sur un cercle de centre u, alors les disques de diamètre u et un autre point sont inclus dans le disque et donc vide. u a degré $n-1$.

4.2 Minimum

Soit un point p et q sont plus proche voisin alors le disque de diamètre pq (inclus dans le disque de centre p passant par q) est vide, donc chaque point a au moins un voisin dans Gabriel. Ci dessus un exemple avec un seul voisin.

4.3 Poisson

On compte le nombre de points q du processus de Poisson X qui définissent des disques de diamètre vide (ligne 1). On applique le Theórème de Slivnyak-Mecke (ligne 2). On passe en coordonnées polaires et on utilise la formule de la probabilité d'un processus de Poisson avec l'aire du disque (ligne 3).

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|pNN(p)\|\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[Disk(0,q)\cap X=\emptyset]}\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\left[Disk(0,q)\cup X=\emptyset\right] \mathrm{d}q \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2} r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r = 2\pi\frac{1}{4\pi} = 4\end{aligned}$$

5 Arithmétique des double

On execute le programme C suivant:

```
♯include <stdio.h>
main()
{
double D52,D53,D54, x;
D52= 4503599627370496.0; //2^52
D53= 9007199254740992.0; //2^53
D54 = 18014398509481984.0; //2^54
x = D53+D52; // première addition
x = x+17.5; // deuxième addition
x = x+D52; // troisième addition
x = x-D54; // soustraction
printf("%lf\n",x);
}
```

avec les règles de l'arithmétique IEEE754.
Commenter chacune des opérations. Quelle est la valeur imprimée pour `x`?

5 Correction:

Pemière addition: la valeur exacte du résultat est un entier avec 54 chiffres binaires, seul les 53 premiers sont représentés mais comme le 54-ème est un 0, cette addition est exacte.
Deuxième addition, le résultat est arrondi à l'entier pair le plus proche: $3\cdot 2^{52}+18$.
L'addition suivante fait dépasser la valeur 2^{54} et le résultat est arrondi au multiple de 4 le plus proche (en cas d'égalité de distance pour le plus proche, ce qui est le cas ici, on choisit le multiple de 8), on obtient donc $2^{54}+16$.
Quand on retire `D54`, il reste 16