2020-03-06

Modèles d'environnements, planification de trajectoires
Énoncé de la partie planification de trajectoires

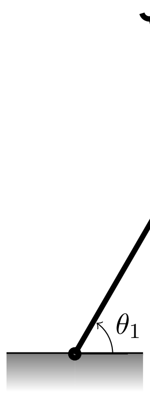


FIG. 1 : Bras à deux degrés de liberté.

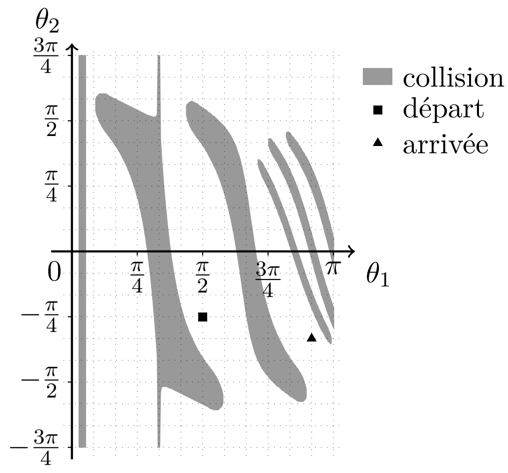


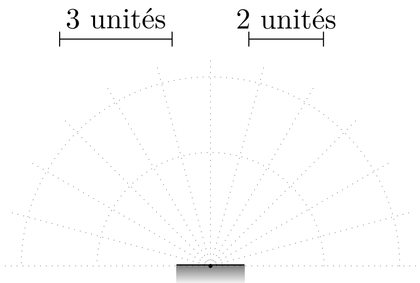
FIG. 2 : Espace de configuration.

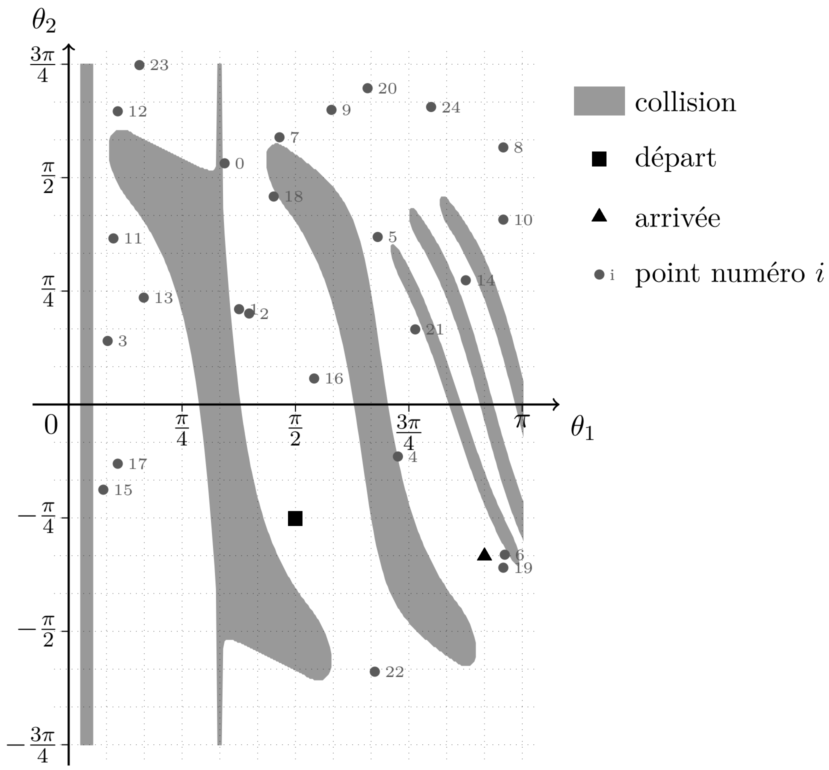
Planification de trajectoire

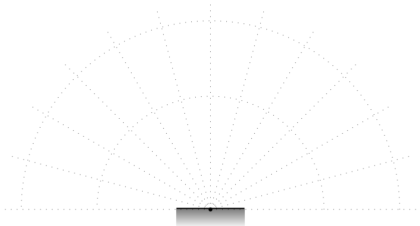
Soit un bras robotique à deux degrés de liberté dont le premier lien, fixé à un support, mesure 3 unités et le deuxième 2 unités (voir Fig. 1). Les angles de ses articulations sont restreints respectivement à $]0;\pi[$ et $]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}[$. Ce bras évolue dans un espace de travail dans lequel sont placés des obstacles circulaires. La figure 2 représente l'espace de configuration avec, en gris, les configurations en collision.

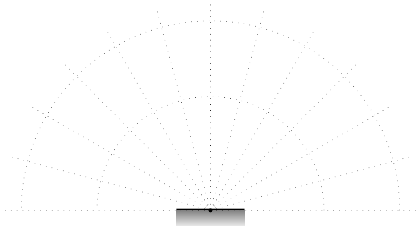
1. Combien d'obstacles y a-t-il dans cet environnement ?
2. Dessinez, sur un des canevas fournis, le bras dans ses positions de départ et d'arrivée telles qu'indiquées à la figure 2. Vous prendrez bien soin que ces deux configurations soient distinguables (une légende est requise).
3. Complétez votre figure de l'espace de travail en incluant les obstacles (n'oubliez pas la légende). Quel type de carte avez-vous dessiné ?
4. Expliquez l'algorithme PRM pour planifier un chemin.
5. Expliquez l'algorithme RRT*. Quelles sont les différences avec PRM ?
6. Sur une nouvelle figure, en vous aidant des points échantillonnés (dans l'ordre indiqué), dessinez le graphe généré par PRM avec un rayon de connexion de $\frac{\pi}{3}$ rad. Combien obtenez-vous de composantes connexes ?
7. À l'aide du graphe obtenu avec PRM, planifiez et indiquez le chemin le plus court.

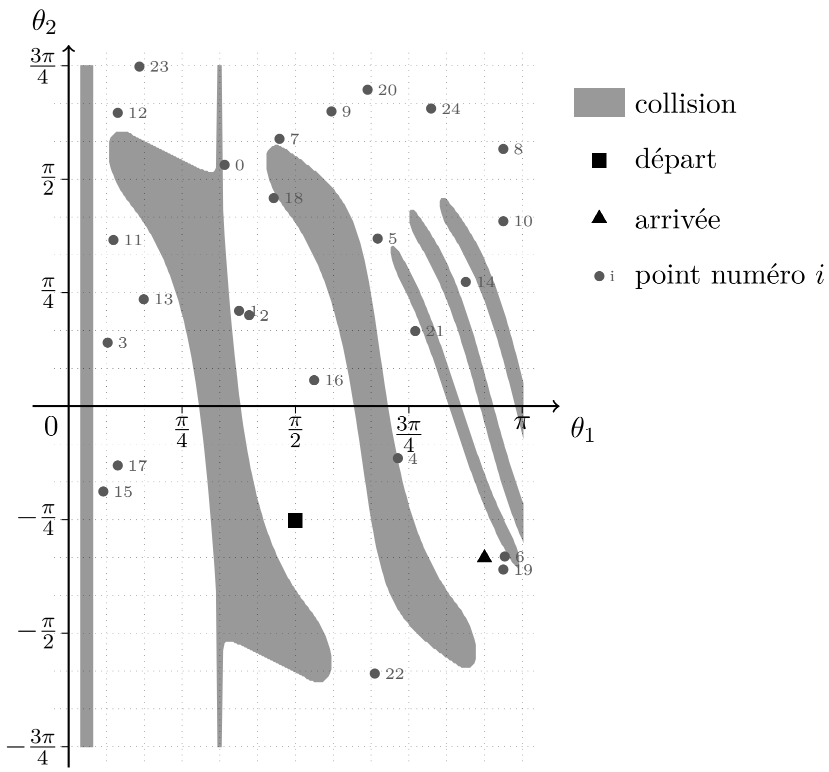
2020-03-06 MEPT – Planification de trajectoires Nom : ____________________________

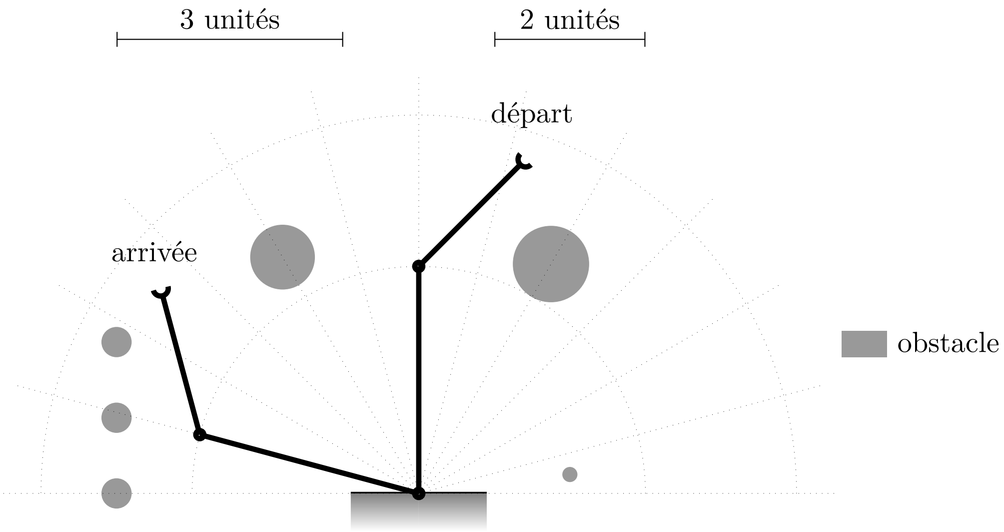


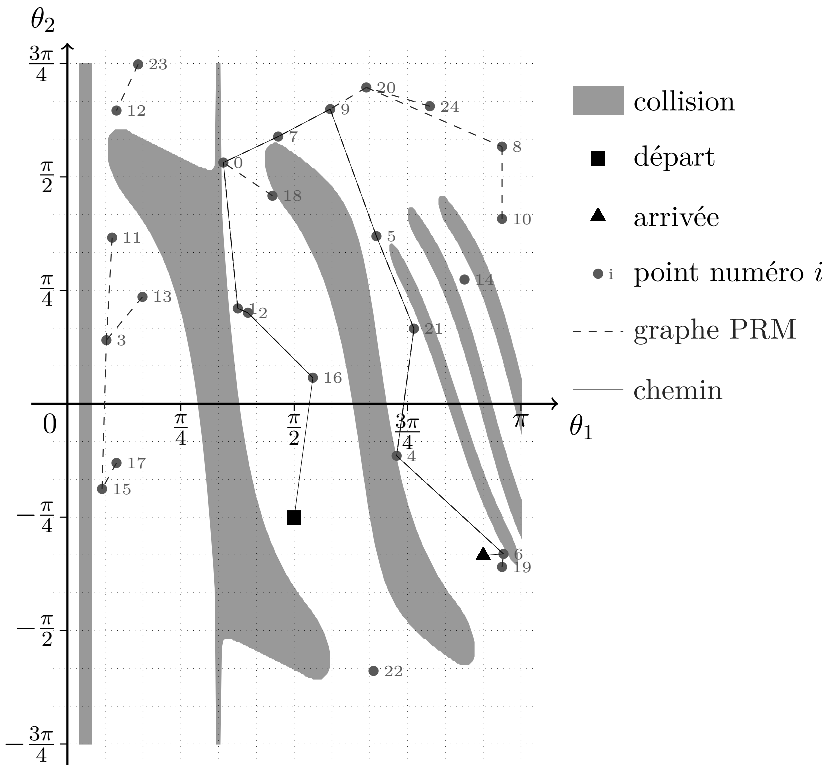









3 unités
2 unités
départ
arrivée
obstacle

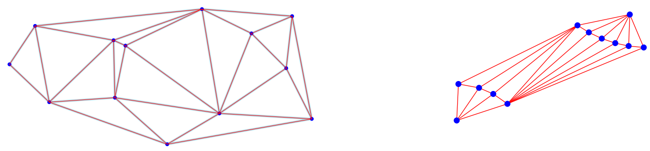

θ_2
$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{4}$
0
$-\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{3\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$
π
θ_1
collision
départ
arrivée
point numéro i
graphe PRM
chemin

Examen 16 janvier 2020

1 Dessiner la triangulation de Delaunay

des deux ensembles de points sur la feuille jointe.

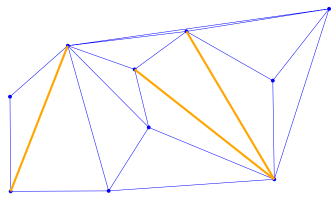
1 Correction:



2 Triangulation localement de Delaunay

Mettre en évidence les arêtes non localement de Delaunay dans la triangulation sur la feuille jointe.

2 Correction:



3 Arithmetique des `double` : Associativité et commutativité de l'addition

`a, b` et `c` sont trois nombres entiers positifs strictement inférieurs à 2^{54} stockés dans de nombres de type `double` (ces nombres sont donc représentés exactement puisqu'ils sont inférieurs à 2^{54} les `double` ayant 53 bits significatifs. On rappelle que le résultat d'un calcul élémentaire est arrondi au plus proche nombre représentable, en cas d'équidistance on choisit le bit de poids faible (le 53ème) nul).

Donnez des (contre-)exemples pour justifier vos réponses "non" et des arguments pour justifier vos réponses "oui".

3.1 Est-ce que `(b-c)+a == (a-c)+b` est toujours vrai ? Si oui, est-ce que la valeur calculée est la valeur exacte?

3.2 Est-ce que `(a+b)-c == (a-c)+b` est toujours vrai ? Si oui, est-ce que la valeur calculée est la valeur exacte?

3 Correction:

3.1

Puisque $0 \leq$`a,b,c`$< 2^{54}$ on a $-2^{54} <$`a-c,b-c`$< 2^{54}$ et le calcul de `a-c`,et `b-c` est donc exact. Par conséquent lors du calcul de `(b-c)+a` ou de `(a-c)+b` on obtient les deux fois l'arrondi au plus proche de la valeur exacte de `a+b-c`. Par contre ce n'est pas forcément la valeur exacte,

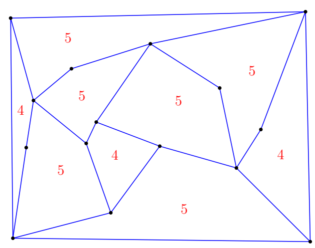
a	$=$	0.1111111111 1111111111 1111111111 1111111111 1111111111 111
b	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 010
c	$=$	0.0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 001
$a-c$	$=$	0.1111111111 1111111111 1111111111 1111111111 1111111111 110
$b-c$	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 001
$(a-c)+b$	$=$	
$(b-c)+a$	$=$	1.0111111111 1111111111 1111111111 1111111111 1111111111 111
arrondi à	$\neq$	1.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 00

3.2

Ce n'est pas toujours vrai

a	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 011
b	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 000
c	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 010
$a-c$	$=$	0.0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 001
$(a-c)+b$	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 001
$a+b$	$=$	1.0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 011
arrondi à		1.0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 10
$(a+b)-c$	$=$	0.1000000000 0000000000 0000000000 0000000000 0000000000 010
	$\neq$	$(a-c)+b$ qui était représentable donc exact

4 Mélange de quads et pentagones



Soit P u ensemble de n points du plan dont l'enveloppe convexe est un quadrilatère. On suppose qu'on nous donne un découpage de l'enveloppe convexe en quadrilatères et pentagones comme sur le dessin.

4.1 Donner des bornes supérieures et inférieures (exactes pas d'ordre de grandeur) sur les nombres q de quadrilatères et p de pentagones en fonction de n.

4.2 Donner des bornes supérieures et inférieures (exactes) sur le degré moyen d'un sommet dans cette subdivision planaire en fonction de n.

4 Correction:

4.1

Euler: $n-a+q+p+1=2$
Nombre d'incidences faces-aretes: $2a=4q+5p+4$,
$2n-4q-5p-4+2q+2p+2=4, \qquad 2n-6=2q+3p$,
$0 \leq p \leq \frac{2n}{3}-2, \qquad 0 \leq q \leq n-3$.

4.2

Le degré sera maximisé si il n'y a que des quadrilatères et minimisé si il n'y a que des pentagones:
$p = 0 : \quad \mathbb{E}[d^\circ] = \frac{1}{n}\sum_1^n d^\circ(v_i) = \frac{2a}{n} = \frac{4q+4}{n} = \frac{4n-12+4}{n} < 4$
$q = 0 : \quad \mathbb{E}[d^\circ] = \frac{2a}{n} = \frac{5p+4}{n} = \frac{5\frac{2n}{3}-10+4}{n} > \frac{10}{3} - \frac{6}{n}$

5 Distribution de Poisson: plus proche voisin

Soit p un point X un processus de Poisson d'intensité un de le plan. Quel est la distance moyenne entre p et son plus proche voisin dans X ? Même question pour son deuxième plus proche voisin. On donne

$$\int e^{-\pi r^2} dr = \frac{1}{2} \qquad \int e^{-\pi r^2} r^3 dr = \frac{1}{2\pi^2}$$
$$\int e^{-\pi r^2} r dr = \frac{1}{2\pi} \qquad \int e^{-\pi r^2} r^4 dr = \frac{3}{8\pi^2} \qquad \int e^{-\pi r^2} r^6 dr = \frac{15}{16\pi^3}$$
$$\int e^{-\pi r^2} r^2 dr = \frac{1}{4\pi} \qquad \int e^{-\pi r^2} r^5 dr = \frac{1}{\pi^3} \qquad \int e^{-\pi r^2} r^7 dr = \frac{3}{\pi^4}$$

5 Correction:

À translation près on suppose que p est l'origine.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\|pNN(p)\|] = \mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[q=NN(p)]}\|q\|\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[Disk(p,\|q\|) \cup X = \emptyset]\,\|q\| \mathrm{d}q \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r \cdot r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 2\pi\frac{1}{4\pi} = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}[\|pNN_2(p)\|] = \mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[q=NN_2(p)\|q\|]}\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[|Disk(p,\|q\|) \cup X| = 1]\,\|q\| \mathrm{d}q \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \pi r^2 e^{-\pi r^2} r \cdot r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 2\pi^2\frac{3}{8\pi^2} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

A noter que on vérifie

$$\begin{aligned}
1 = \mathbb{E}[\sharp NN(p)] = \mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[q=NN(p)]}\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[Disk(p,\|q\|) \cup X = \emptyset]\, \mathrm{d}q \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} \cdot r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 2\pi\frac{1}{2\pi} = 1 \\
1 = \mathbb{E}[\sharp NN_2(p)] = \mathbb{E}\left[\sum_{q\in X} \mathbb{1}_{[q=NN_2(p)]}\right] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[|Disk(p,\|q\|) \cup X| = 1]\, \mathrm{d}q \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \pi r^2 e^{-\pi r^2} \cdot r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}r = 2\pi^2\frac{1}{2\pi^2} = 1
\end{aligned}$$