

1 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci contre (sur la feuille jointe).

2 Arrangement de cercles

On considère un ensemble de n cercles dans le plan.

Ces cercles découpent le plan. On note s le nombre sommets (de points d'intersection entre les cercles), a le nombre d'arêtes (d'arcs de cercle entre deux sommets) et f le nombre de faces finies (de régions dans le découpage du plan).

On suppose que -1) on est en position générale (il n'y a pas trois cercles passant par le même point, les cercles sont soit sécants soit disjoints et pas tangents) -2) l'union des cercles est connexe.

Dans la figure ci dessous les sommets sont numérotés en noir, les arêtes en rouge et les faces en violet. On a $n = 5$, $s = 8$, $a = 16$ et $f = 9$.

2.1 Relation d'Euler

Écrire la relation d'Euler avec les variables ci dessus.

2.2 Arêtes et sommets

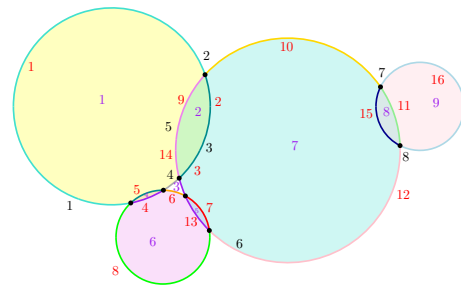
Écrire une relation liant s et a .

2.3 Taille de l'arrangement

En considérant le graphe dont les nœuds sont des cercles et les arcs représente les intersections entre cercle, trouver des bornes inférieures et supérieures sur s . En déduire des bornes sur f .

2.4 Exemples

Décrire des exemples réalisant ces bornes inférieures et supérieures pour n quelconque. Dessiner des exemples pour $n = 6$.



3 Robustesse des calculs

Étant donné deux cercles de centres (x_1, y_1) et (x_2, y_2) et de rayons r_1 et r_2 ,

3.1 Prédicat

Écrire le prédicat testant si les deux cercles s'intersectent sous la forme du signe d'un polynôme en $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2$.

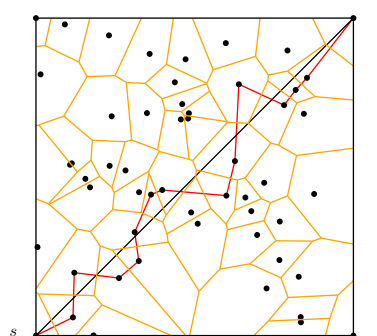
3.2 Précision

Si les entrées $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2$ sont des entiers dans l'intervalle $[-2^b, 2^b]$ et que les calculs sont fait à l'aide de `double`, pour quelle valeur de b peut-on garantir que le prédicat va répondre de manière correcte.

(Rappel : la norme IEEE754 stocke les `double` avec 53 chiffres binaires significatifs.)

4 Chemin de Voronoï

On considère un ensemble X de n points à l'intérieur du carré $[0, 1]^2$ auxquels on ajoute les 4 coins du carré. On note $s = (0, 0)$ et $t = (1, 1)$. On imagine un point se déplaçant en ligne droite de s à t , au début son plus proche voisin dans X est $s = v_0$, puis un autre point v_1 de X devient plus proche et ainsi de suite. Soit $s = v_0, v_1, v_2 \dots v_{k-1}, v_k = t$ la suite des plus proches voisins successifs du point mobile. La ligne polygonale $v_0, v_1, v_2 \dots v_{k-1}, v_k$ sera appelée chemin de Voronoï.



4.1 Delaunay

L'arête $v_i v_{i+1}$ est-elle une arête de Delaunay? (Le prouver ou donner un contre exemple.)

4.2 Longueur

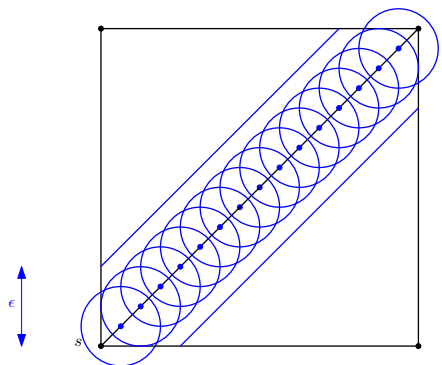
Donner si elles existent une borne inférieure et une borne supérieure sur la longueur du chemin de Voronoï. Dessiner deux exemples réalisant ces deux bornes.

4.3 Ecartement

Dans cette question, on suppose que les n points sont uniformément distribués dans le carré.

On va considérer les droites $y = x + \epsilon$ et $y = x - \epsilon$ qui délimitent une bande autour de la diagonale et on veut étudier la probabilité que le chemin de Voronoï sorte de la bande.

On va paver la diagonale avec des disques de rayon $\frac{\epsilon}{2}$ centrés aux points $(\frac{j\epsilon}{4}, \frac{j\epsilon}{4})$ pour j entier dans $[1, \frac{4}{\epsilon} - 1]$.



4.3.1

Montrer que en un point (x, x) de la diagonale le cercle de centre (x, x) et de rayon ϵ contient au moins un des cercles de la famille.

4.3.2

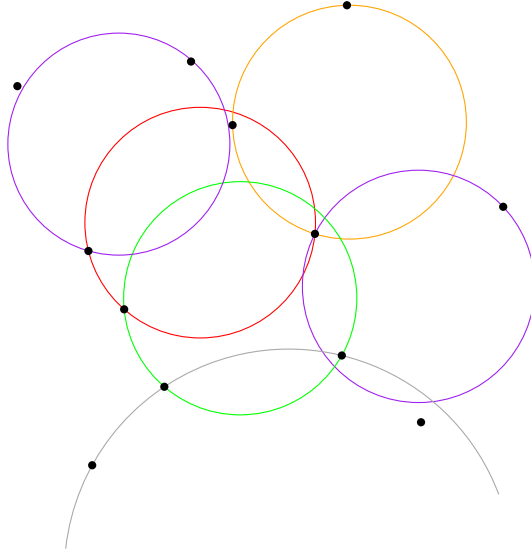
En déduire une majoration de la probabilité que le chemin de Voronoï sorte de la bande. (On rappelle que $1 - x \leq e^{-x}$ est une majoration utile.)

Trouver la valeur de ϵ la plus petite possible, en fonction de n , pour que cette probabilité soit exponentiellement petite (en fonction de n aussi).

La correction sera rapidement disponible sur ma page web.

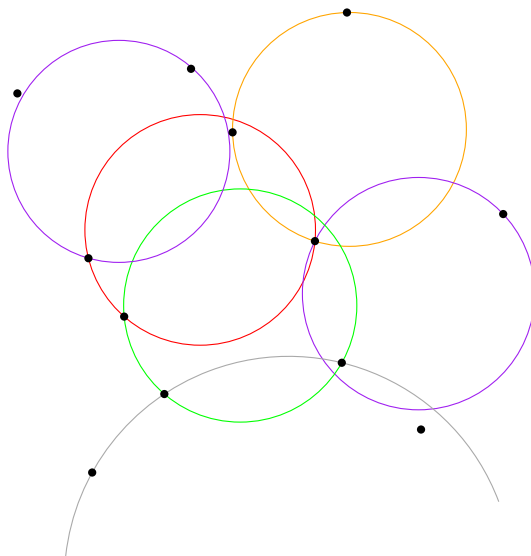
Nom :

1 Triangulation de Delaunay



Dessiner la triangulation de Delaunay

2ème essai en cas de rature !



Examen IPAC Synthèse Image et Géométrie

Partie II (B. Lévy)

Mardi 10 Janvier 2017

1 Moindres carrés - plan de regression linéaire

On considère un ensemble de m points de mesure en 3D, de coordonnées X_k, Y_k, Z_k , $1 \leq k \leq m$. On souhaite reconstruire une fonction linéaire sous la forme $z(x, y) = ax + by + c$ qui réalise une approximation de ces points de données au sens des moindres carrés.

1. Quelles sont les variables à trouver ? Donner l'expression de la fonction à minimiser.
2. Ecrire le système linéaire à résoudre.
3. Dans quels cas ce système linéaire est-il singulier (à savoir, avec une matrice de déterminant nul) ? Existe-t-il des solutions dans les cas singuliers ?
4. On ajoute un terme $R_\epsilon = \epsilon(a^2 + b^2 + c^2)$ à la fonction minimisée, avec $\epsilon > 0$. Que devient le système linéaire à résoudre ? Montrer qu'il admet toujours une solution. Dans un cas singulier, vers quoi cette solution tend-elle quand ϵ tend vers 0 ?
5. On considère maintenant des fonctions quadratiques plutôt que linéaires, sous la forme $z(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$. Ecrire la fonction à minimiser et le système linéaire à résoudre (mais sans le terme R_ϵ cette fois). On pourra expliciter les termes de la matrice A et du vecteur b , et exprimer le système en fonction de A et b (pas la peine d'expliciter les termes de $A^t A$ ni de $A^t b$).

2 Caractéristique d'Euler-Poincaré

1. Rappeler l'expression de la caractéristique d'Euler-Poincaré χ d'une surface maillée en fonction de V, E, F (respectivement nombre de sommets, d'arêtes et de faces).

2. Quelle est la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface ayant plusieurs composantes connexes (à savoir plusieurs morceaux) en fonction des caractéristiques d'Euler-Poincaré des morceaux ? (et pourquoi ?)
3. Rappeler la définition et la caractéristique d'Euler-Poincaré d'un disque topologique.
4. Etant donnée une surface maillée, on peut créer un nouveau bord en supprimant un disque topologique. Montrer que cette opération diminue la caractéristique d'Euler-Poincaré de la surface initiale de 1 pour tout disque topologique qu'on supprime.
5. Etant donnée une surface triangulée, on peut créer une nouvelle anse en supprimant deux disques topologiques ayant le même nombre de sommets sur leurs bords et en reliant les deux bords ainsi formés. Montrer que cette opération diminue la caractéristique d'Euler-Poincaré de 2. On pourra s'aider d'un dessin.
6. En déduire la caractéristique d'Euler-Poincaré d'une surface ayant c composantes connexes, b bords et g anses.
7. Donner (dessiner) plusieurs exemples de surfaces de caractéristique $\mathcal{X} = 2$.

1 Triangulation de Delaunay

2 Arrangement de cercles

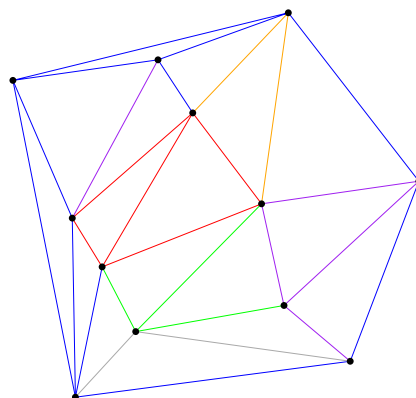
2.1 Relation d'Euler

$$s - a + (f + 1) = 2$$

(et c'est bien vérifié par la figure de l'énoncé : $(9 + 1) - 16 + 9 = 2$)

2.2 Arêtes et sommets

Chaque sommet a degré 4,
chaque arête a deux sommets : $4s = 2a$



2.3 Taille de l'arrangement

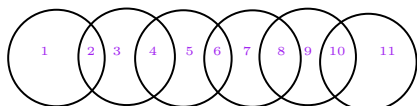
Si on regarde le graphe dont les nœuds sont des cercles et les arcs représente les intersections, l'hypothèse de connexité nous dit que ce graphe a au moins $n - 1$ arêtes. Par ailleurs il ne peut être plus gros que le graphe complet. Chaque arc de ce graphe correspond à deux sommets (position générale).

$$2(n - 1) \leq s \leq n(n - 1)$$

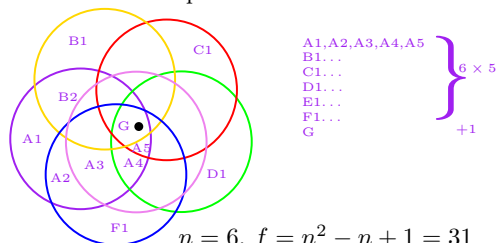
$$2n - 1 \leq f = 1 + a - s = 1 + \frac{4}{2}s - s = 1 + s \leq n^2 - n + 1$$

2.4 Exemples

Une «chaîne» et des cercles de même rayon contenant tous un même point.



$$n = 6, f = 2n - 1 = 11$$



$$n = 6, f = n^2 - n + 1 = 31$$

3 Robustesse des calculs

3.1 Prédicat

$$s = \text{sign}((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (r_1 + r_2)^2)$$

Si $s < 0$ alors intersection ; Si $s = 0$ alors tangent ; Si $s > 0$ alors disjoint ;

3.2 Précision

$x_1 - x_2, y_1 - y_2$ et $r_1 + r_2$ sont des entiers de $[-2^{b+1}, 2^{b+1}]$

$(x_1 - x_2)^2, (y_1 - y_2)^2$ et $(r_1 + r_2)^2$ sont des entiers de $[0, 2^{2b+2}]$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \in [0, 2^{2b+3}]$

$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (r_1 + r_2)^2 \in [-2^{2b+2}, 2^{2b+3}]$

Pour que les calculs soient exacts il suffit que $2b + 3 \leq 53$, c'est à dire $b \leq 25$. Remarque : on ne risque pas de débordement de capacité.

(En fait l'arrondi au plus près permet de se contenter de $2b + 3 \leq 54$ en réordonnant les calculs en $s = \text{sign}((x_1 - x_2)^2 - (r_1 + r_2)^2) + (y_1 - y_2)^2$ mais ça ne change rien pour la limite sur b .)

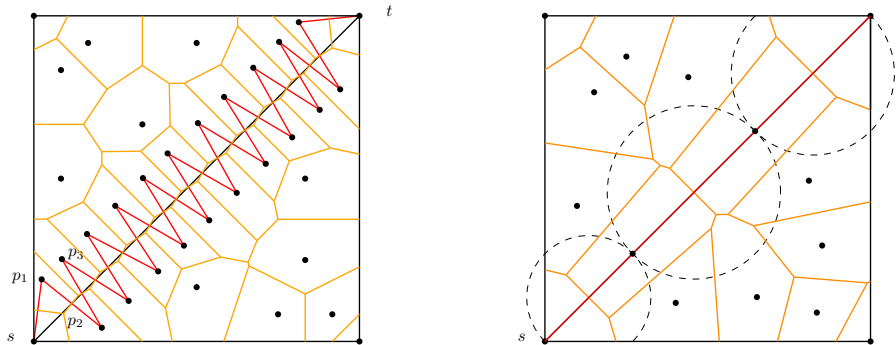
4 Chemin de Voronoï

4.1 Delaunay

Quand le plus proche voisin change de v_i à v_{i+1} , le point mobile est à une position w_i sur l'arête de Voronoï frontière entre les cellules de v_i et v_{i+1} donc $v_i v_{i+1}$ est bien une arête de Delaunay puisque Delaunay est le dual de Voronoï.

4.2 Longueur

En zigzaguant, on peut faire des exemples où le chemin de Voronoï est aussi long que l'on veut. Si on a des points sur la diagonale la longueur du chemin peut-être $\sqrt{2}$.



4.3 Ecartement

4.3.1

En effet le centre de cercle le plus proche est à une distance au plus $\frac{\sqrt{2}\epsilon}{8}$ et $\frac{\sqrt{2}}{8} + \frac{1}{2} = 0.67 < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$.

4.3.2

Pour pouvoir s'écrater en dehors de la bande il faut qu'un des cercles soit vide.

$$\begin{aligned}
 Prob(\text{hors de la bande}) &\leq Prob(\text{au moins un des cercles est vide}) \\
 &\leq \#(\text{cercles}) \cdot Prob(\text{un cercle donné est vide}) \\
 &\leq \#(\text{cercles}) \cdot \left(1 - \frac{\text{Aire d'un cercle}}{\text{Aire du carré}}\right)^n \\
 &\leq \frac{4}{\epsilon} \cdot \left(1 - \frac{\pi \frac{\epsilon^2}{4}}{1}\right)^n \\
 &\leq \frac{4}{\epsilon} e^{-\frac{\pi}{4} n \epsilon^2} \\
 &\leq 4\sqrt{n} e^{-\frac{\pi}{4} \log n} \quad \text{Choosing } \epsilon = \sqrt{\frac{\log n}{n}} \\
 &\leq 4n^{\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}} \simeq 4n^{-0.28}
 \end{aligned}$$