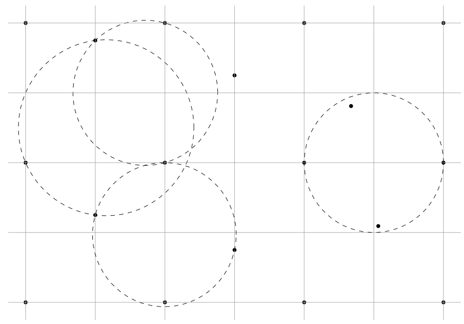
Géométrie algorithmique, examen M2, 3 mars 2016, énoncé



1 Triangulation de Delaunay

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points ci contre (sur la feuille jointe).

2 Points maximaux

Étant donné une liste de n points du plan $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ avec (x_i, y_i) les coordonnées de p_i.
On supposera que l'on a pas de points à la même abcisse ni à la même ordonnée.
Définitions
Dominance :

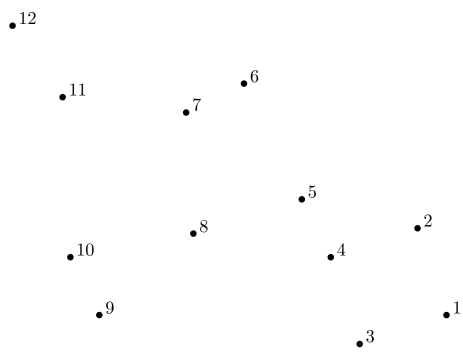
$$p_j \text{ domine } p_i \iff p_i \prec p_j \iff x_i < x_j \text{ et } y_i < y_j$$

Maximalité : p_j est maximal si il n'est pas dominé :

$$p_j \in Max(S) \iff \forall i \in [1, n] \;\; p_i \not\prec p_j.$$

Algorithme

```
Trier et renuméroter les points de S pour que x_1 > x_2 > ... > x_n ;
max = 1 ;    //p_1 est le plus haut qu'on a vu
écrire « p_1 maximal » ;
pour i = 2 à n
        si y_i < y_max
                écrire « p_max domine p_i » ;
        sinon
                max = i ;
                écrire « p_i maximal » ;
        fin si
fin pour
```



2.1 Exemple

Donner la liste des points maximaux dans la figure ci contre.

2.2 Complexité algo

Étudier la complexité de l'algorithme ci dessus.

2.3 Complexité $Max(S)$ dans le cas le pire

Étudier la complexité dans le cas le pire du nombre de points dans $Max(S)$. Donner un exemple réalisant le cas le pire.

2.4 Complexité $Max(S)$ en moyenne dans un carré

Dans cette question, on suppose les points de S indépendamment uniformément distribués dans le carré $[0,1]^2$.

2.4.1

À la ligne 5 de l'algorithme quel est la probabilité que la réponse au test soit non ?

2.4.2

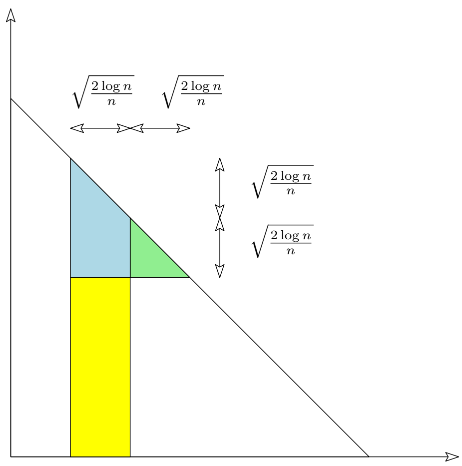
En déduire l'espérance (la moyenne) de la complexité du nombre de points dans $Max(S)$.

2.5 Complexité $Max(S)$ en moyenne dans un triangle

Dans cette question, on suppose les points de S indépendamment uniformément distribués dans le triangle $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 1$.
On regarde la points avec leur numérotation AVANT le tri en x.

2.5.1

Quelle est la probabilité que p_1 appartienne au triangle vert ? En déduire l'espérance du nombre de points de S dans la région en vert sur la figure.



2.5.2

Majorer la probabilité d'avoir zéro point de $Max(S)$ dans la région en vert (on pourra utiliser l'inégalité $\forall t, 1 - t < e^{-t}$). En déduire la probabilité qu'il y ait des points de $Max(S)$ dans la région jaune.

2.5.3

En déduire une borne supérieure sur l'espérance de la complexité du nombre de points dans $Max(S)$.

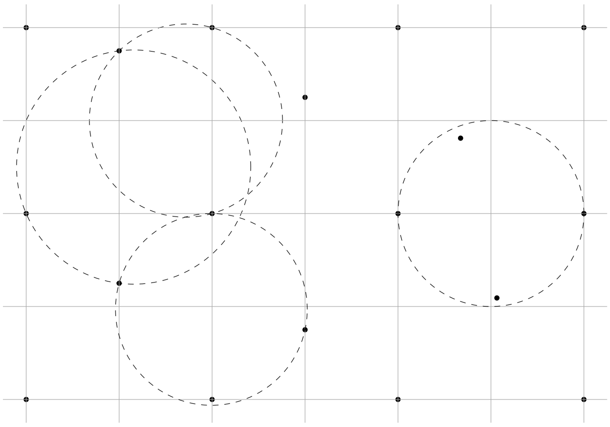
2.5.4

Donner l'idée de démonstration d'une borne inférieure sur l'espérance de la complexité du nombre de points dans $Max(S)$.

La correction sera rapidement disponible sur ma page web.

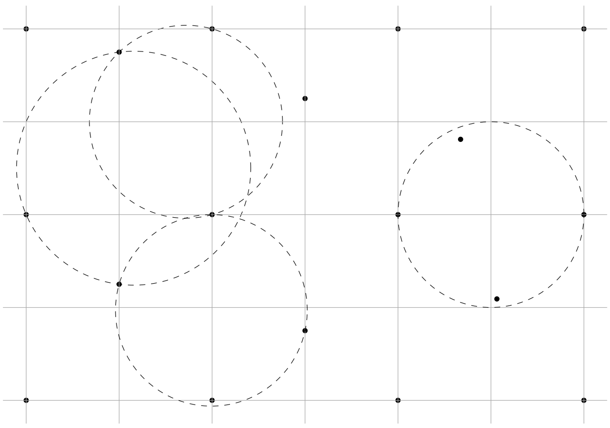
Nom :

1 Triangulation de Delaunay



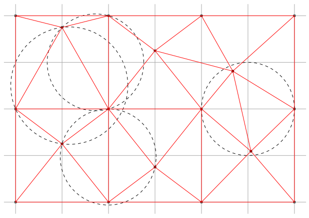
Dessiner la triangulation de Delaunay

2ème essai en cas de rature !



Géométrie algorithmique, examen M2, 1 mars 2016, correction

1 Triangulation de Delaunay



2 Points maximaux

2.1 Exemple

$p_1, p_2, p_5, p_6, p_{12}$.

2.2 Complexité algo

Le tri a une complexité $O(n \log n)$. Trivialement, la boucle est exécutée $O(n)$ fois, la complexité totale est donc $O(n \log n)$.

2.3 Complexité $Max(S)$ dans le cas le pire

C'est clairement linéaire, il suffit de considérer des points sur la droite $x + y = 1$ pour qu'ils soient tous maximaux.

2.4 Complexité $Max(S)$ en moyenne dans un carré

2.4.1

Il faut que y_i soit le plus grand des y_j pour $j \in [1, i]$, comme les y_j sont identiquements distribués et indépendants la probabilité est $\frac{1}{i}$.

2.4.2

$$\mathbb{E}\left[|Max(S)|\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[p_i \in Max(S)\right] = \sum_{i=1} n \frac{1}{i} \simeq \log n$$

2.5 Complexité $Max(S)$ en moyenne dans un triangle

2.5.1

On note V la région en vert et T le triangle complet.

$$\mathbb{P}\left[p_1 \in V\right] = \frac{\text{Area}\,(V)}{\text{Area}\,(T)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \frac{2\log n}{n}$$

$$\mathbb{E}\left[|V \cap S|\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left[p_i \in V\right] = n\,\mathbb{P}\left[p_1 \in V\right] = n\frac{2\log n}{n} = 2\log n$$

2.5.2

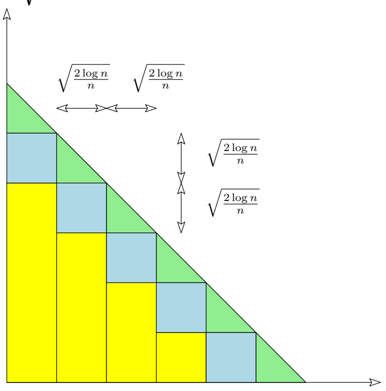
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left[|S\cap V|=0\right] &= \mathbb{P}\left[p_1\notin V\right]^n \\
&= \left(()\,1-\mathbb{P}\left[p_1\in V\right]\right)^n \\
&\leq \left(e^{-\mathbb{P}[p_1\in V]}\right)^n = e^{-n\,\mathbb{P}[p_1\in V]} \\
&\leq e^{-n\frac{2\log n}{n}} = e^{-\log n} = \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Si on a un point dans la région en vert alors ce point domine tout point de la région jaune qui ne peut donc contenir de point de $Max(S)$.

$$\mathbb{P}\left[|S\cap J|\neq 0\right]\leq \mathbb{P}\left[|S\cap V|=0\right]\leq \frac{1}{n^2}$$

2.5.3

On remplis le carré avec des régions jaunes, bleues et vertes notées J_k, B_k et V_k avec $k\in[1,K]$ et $K=\sqrt{\frac{n}{2\log n}}$. comme ceci :



On compte séparément les contributions des parties de différentes couleurs.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Max(S)|\right] &= \mathbb{E}\left[|Max(S)\cap\bigcup_k J_k|\right]+\mathbb{E}\left[|Max(S)\cap\bigcup_k B_k|\right]+\mathbb{E}\left[|Max(S)\cap\bigcup_k V_k|\right] \\
&\leq \mathbb{P}\left[\exists k;|J_k\cap S|\neq 0\right]\cdot n+\mathbb{P}\left[\forall k;|J_k\cap S|=0\right]\cdot 0+n\frac{\text{Area}\left(\bigcup_k B_k\right)}{\text{Area}\,(T)}+n\frac{\text{Area}\left(\bigcup_k V_k\right)}{\text{Area}\,(T)} \\
&\leq \left(\sum_k\frac{1}{n^2}\right)n+0+n\cdot 2\sqrt{\frac{n}{2\log n}}\left(\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\right)^2+n\cdot\sqrt{\frac{n}{2\log n}}\left(\sqrt{\frac{2\log n}{n}}\right)^2 \\
&\leq \sqrt{\frac{n}{2\log n}}\frac{1}{n}+3\sqrt{2n\log n}=O(\sqrt{n\log n})
\end{aligned}$$

2.5.4

On va compter un seul point par triangle vert non vide car un point d'un triangle vert ne peut pas dominer un point d'un autre triangle vert.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[|Max(S)|\right] &\geq \sum_k\mathbb{P}\left[|V_k\cap S|\neq 0\right] \\
&\geq \sqrt{\frac{n}{2\log n}}(1-\frac{1}{n})=\Omega\left(\sqrt{\frac{n}{\log n}}\right)
\end{aligned}$$

La complexité est donc en $\sqrt{n}$ a du log près, log qui pourrais être enlevé avec une démonstration plus précise.