Examen Master STIC Spécialité IGMMV ISI ESSI3
2006-2007 : géométrie algorithmique
2h — 8 décembre 2006

Les exercices sont indépendants

1 Delaunay : échauffement !

Dessiner la triangulation de Delaunay de l'ensemble de points de la figure 1. Cet ensemble est repris (en double en cas de rature) en plus grand sur une feuille à part (à rendre). Quelques cercles ont étés tracés pour lever les ambiguïtés pour ceux qui n'aurait pas de compas.

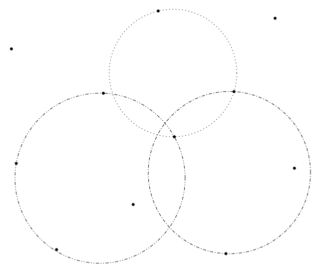


FIG. 1 –

2 Triangulation

On a une triangulation du plan à m triangles.

2.1

Quel est le nombre maximal et minimal de sommets de cette triangulation (bornes exactes en fonction de m seulement) ?

Quel est le nombre maximal et minimal d'arêtes de cette triangulation (bornes exactes en fonction de m seulement) ?

2.2

Deux triangulations du plan seront combinatoirement équivalente si il existe une bijection entre les sommets qui préserve les arêtes (figure 2).

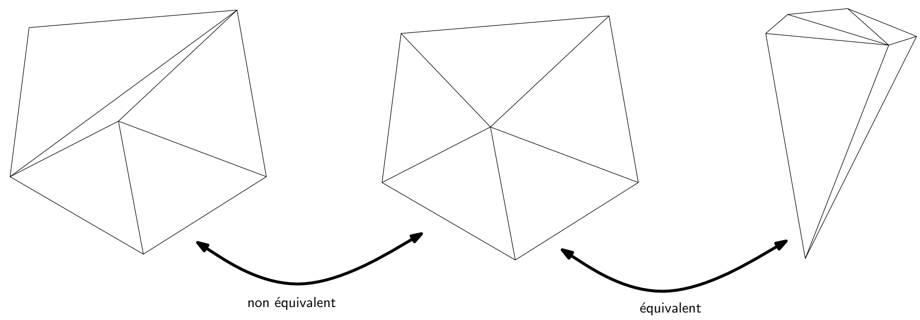


FIG. 2 – Triangulations équivalentes

Dessiner toutes les triangulations combinatoires possibles pour 3 triangles.

Même question pour 4 triangles. On reliera entre elles deux triangulations si on peut passer de l'une à l'autre par une bascule d'arête.

3 Delaunay de points dans 2 plans parallèles

On considère les rectangles $R_- = \{(x,y,z); x \in [-1,1], y \in [-1,1], z = -1\}$ et $R_+ = \{(x,y,z); x \in [-1,1], y \in [-1,1], z = 1\}$.

Et deux ensembles de n points S_- et S_+ appartenant respectivement à R_- et R_+. On note $S = S_- \cup S_+$.

3.1

Montrer qu'un triangle de la triangulation 2D de S_+ est une face de la triangulation de Delaunay 3D de S.

3.2

Quel est l'ordre de grandeur du nombre maximal d'arêtes de la triangulation de Delaunay 3D de S.

À partir de maintenant on suppose que les points de S_+ vérifie la propriété suivante : tout cercle de rayon ϵ inclus dans R_+ contient au minimum 1 point et au maximum 10 points de S_+. On suppose la même chose pour S_-.

3.3

Calculer le maximum et le minimum du rayon d'un cercle de Delaunay dans la triangulation 2D de S_+.

3.4

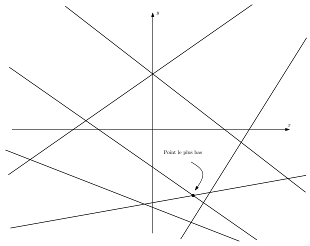
Étant donné $p_+ \in S_+$ et $p_- \in S_-$ tel que p_+p_- soit une arête de la triangulation de Delaunay 3D de S. On définit q_+ la projection de p_+ sur S_-, donner le maximum et le minimum de la distance entre q_+ et p_-.

3.5

Donner une borne supérieure asymptotique sur le nombre d'arêtes dans la triangulation de Delaunay 3D de S.

4 Le point le plus bas

On se donne un ensemble de n droites $d_i \; : y = a_i x + b_i ; 1 \leq i \leq n$ et on cherche le point le plus bas dans la cellule contenant l'origine (on suppose qu'il n'y a pas de droites horizontales ni de droites passant par l'origine, $a_i \neq 0$ et $b_i \neq 0$). Que l'on notera $L(d_i, 1 \leq i \leq n)$



4.1

On note $p_{k-1} = (x_{k-1}, y_{k-1}) = L(d_i, 1 \leq i \leq k-1)$ la solution de notre problème pour les $k-1$ premières droites.

Sur la feuille jointe, indiquer la suite des points p_i (figure en double en cas de rature).

4.2

A quelle condition algébrique le point $d_j \cap d_{j'}$ est-il du même coté de l'origine par rapport à d_k ?

Quel est le degré de ce prédicat ?

4.3

À quelle condition p_{k-1} la solution des $k-1$ premières droites reste-t-elle valable pour les k premières droites ? (À quelle condition $p_{k-1} = p_k$?)

Si la solution change ($p_{k-1} \neq p_k$) peut-on trouver une droite contenant p_k ? Justifier.

4.4

Si $p_{k-1} \neq p_k$ comment trouver p_k en k opérations ?

4.5

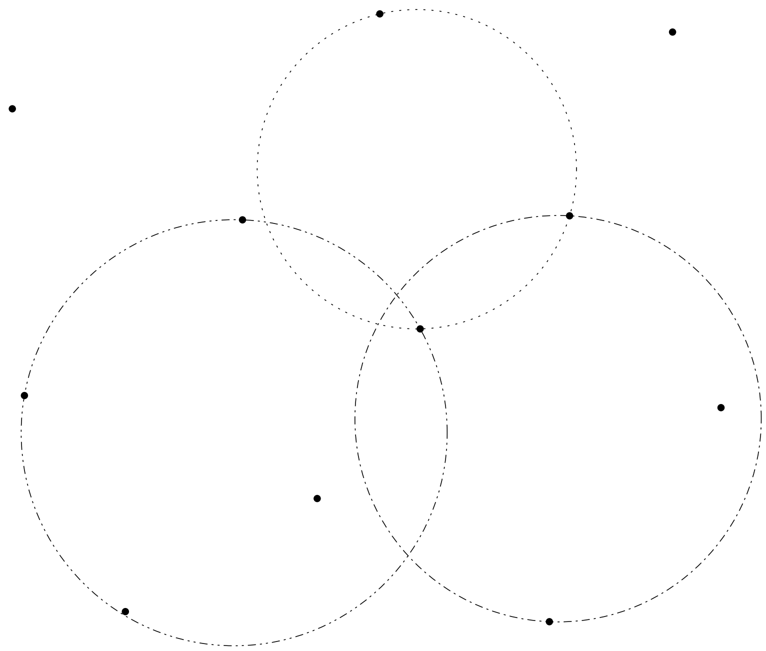
Si les droites sont dans un ordre aléatoire, quelle est la probabilité que $p_{k-1} \neq p_k$?

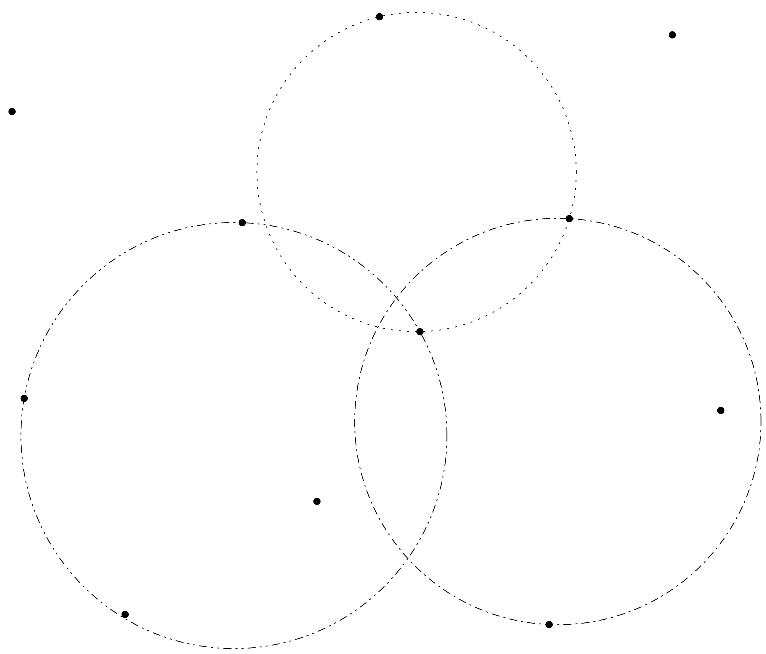
4.6

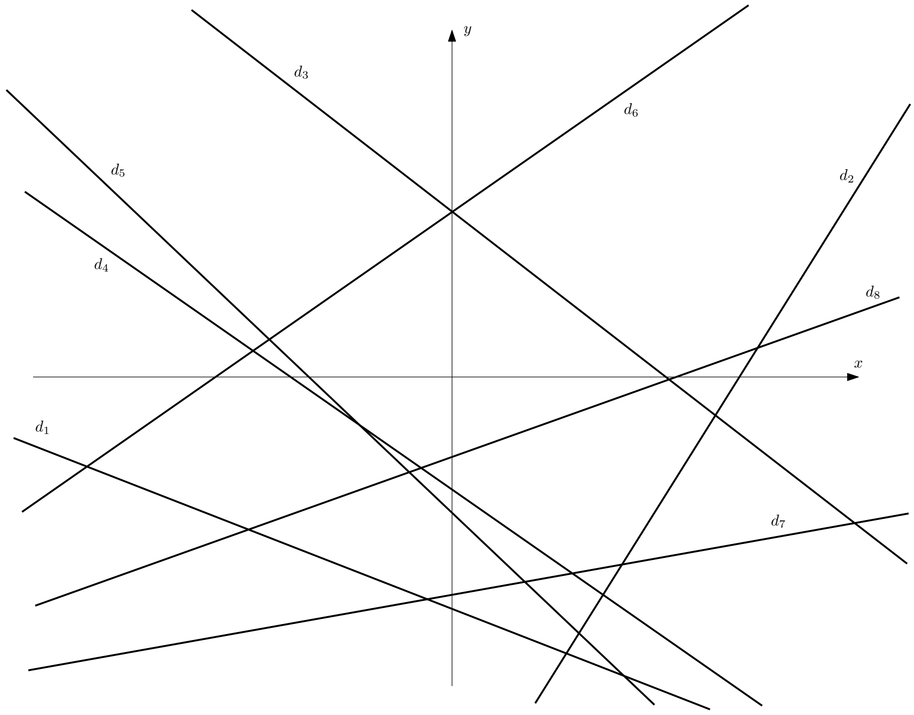
Si les droites sont dans un ordre aléatoire, quel est le coût pour passer de p_{k-1} à p_k ? Écrire une équation de récurrence sur la complexité de l'algorithme $f(k)$ pour k droites (on compte le nombre d'appel au prédicat). Donner la complexité.

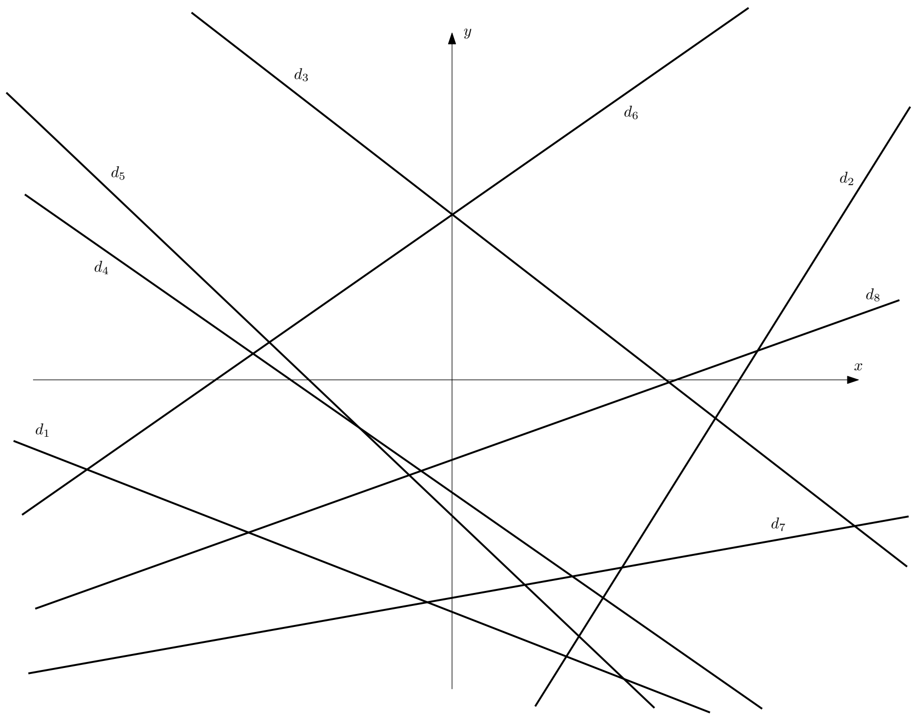
Examen Master STIC, géométrie algorithmique 2006-2007
Figures à compléter et à rendre

Nom :
Prénom :



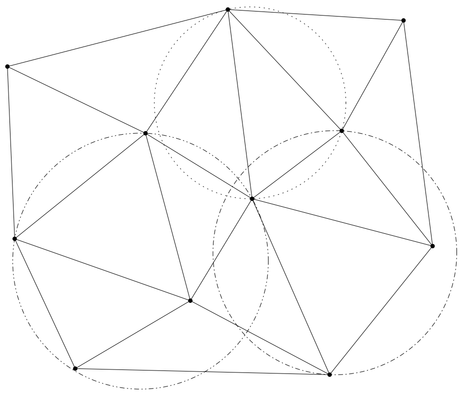



y
x
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
d_8


y
x
d_1
d_2
d_3
d_4
d_5
d_6
d_7
d_8

Examen Master STIC, géométrie algorithmique 2006-2007, correction

1 Delaunay : échauffement !



2 Triangulation

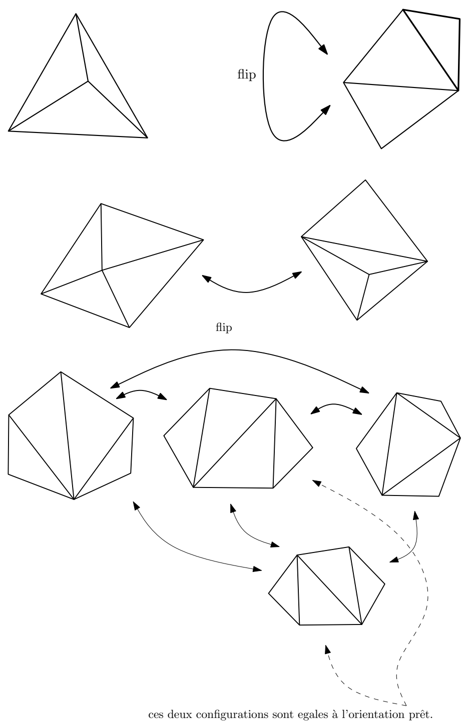
2.1

Euler : $n - e + (m+1) = 2$.
Triangulation : $2e = 3m + k$ où k est le nombre de sommets de l'enveloppe.
Ça donne : $n = \frac{m+2+k}{2}$, $e = \frac{3m+k}{2}$
comme $3 \leq k \leq m+2$ on a

$$\frac{m}{2} + \frac{5}{2} \leq n \leq m+2$$

$$\frac{3m}{2} + \frac{3}{2} \leq e \leq 2m+2$$

2.2



3 Delaunay de points dans 2 plans parallèles

3.1

Soit pqr un triangle de Delaunay de S_+. On note σ le centre du cercle Σ circonscrit à pqr. La sphère de centre $(x_\sigma, y_\sigma, 2)$ passant par p coupe le plan $z = 1$ en Σ et donc ne contient pas de points de S_+ puisque pqr est de Delaunay ; la sphère ne coupe pas le plan $z = -1$ et donc ne contient pas non plus de points de S_-. On a trouvé une sphère passant par p, q et r vide de points de S, pqr est un triangle de Delaunay.

3.2

C'est $\Omega(n^2)$, en prenant des points alignés sur deux segments non parallèles. Par exemple en prenant $p_{i+} = (0, \frac{i}{n}, 1)$ et $p_{j-} = (\frac{j}{n}, 0, 1)$ les n^2 paires $p_{i+}p_{j-}, \forall ij$ sont toutes des arêtes de Delaunay.

3.3

Le minimum est 0, la propriété ci dessous n'empêche pas d'avoir 3 points très proches les uns des autres.

Le maximum est bien évidemment inférieur à ϵ puisqu'un cercle de Delaunay doit être vide, on peut se rapprocher d'aussi prêt que l'on veut de ce maximum, par exemple un maillage avec des triangles équilatéraux de rayon $\epsilon - \nu$ pour $\nu << \epsilon$ nous donne un exemple.

On peut faire un dessin.

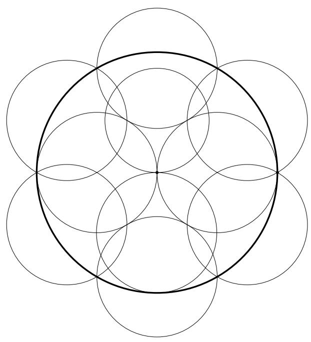
3.4

Le minimum est encore 0, rien n'interdit d'avoir un point de S_- en q_+ et alors p_+p_- sera une arête de Delaunay puisque la sphère tangente à R_+ et R_- en ces points est clairement vide.

Une sphère vide passant par p_+ et p_- coupe S_+ et S_- en deux cercles de mêmes rayon, ces cercles doivent avoir un rayon inférieur à ϵ d'après la propriété de l'échantillonnage comme q_+ et p_- appartiennent au cercle dans R_- leur distance est inférieure à 2ϵ.

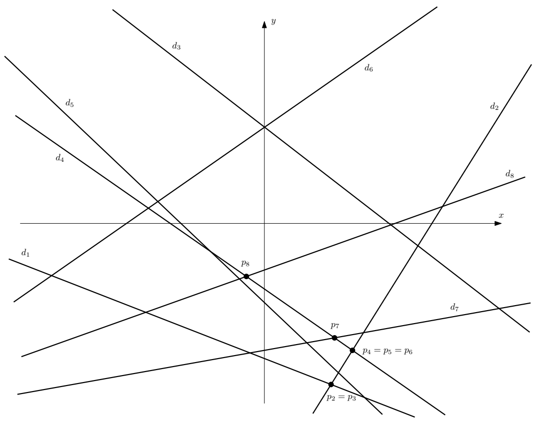
3.5

Pour un point p_+, les arêtes de Delaunay incidentes doivent arriver sur un point à distance inférieure à 2ϵ de q_+, ce cercle de rayon 2ϵ peut être recouvert par 10 cercles de rayon ϵ (voir figure) et donc contiendra moins de 100 points. Le nombre d'arêtes dans la triangulation de Delaunay 3D de S est donc inférieur à $100n$.



4 Le point le plus bas

4.1



4.2

$d_j \cap d_{j'}$ est obtenu en résolvant $a_j x + b_j = a_{j'} x + b_{j'}$ soit $x_k = \frac{b_j - b_{j'}}{a_{j'} - a_j}$ et $y_k = a_j x + b_j$.

On substitue maintenant dans l'équation de d_k on regarde si $a_k x_k - y_k + b_k$ a le même signe que b_k.

En multipliant tout par $(a_{j'} - a_j)$ ça nous fait un prédicat de degré 2.

4.3

p_{k-1} est l'intersection de deux droites $p_{k-1} = d_j \cap d_{j'}$ avec $j, j' \leq k-1$. On applique juste le prédicat précédent aux droites d_j, $d_{j'}$ et d_k.

Si $p_{k-1} \neq p_k$ alors $p_k \in d_k$ en effet dans le cas contraire p_k serait un point localement minimal dans la cellule définie par les $k-1$ premières droites, mais cette cellule est convexe, elle n'a donc qu'un seul minimum p_{k-1}.

4.4

On sait que ce point est sur d_k, on démarre donc avec $q_1 = d_1 \cap d_k$ puis lorsque l'on ajoute la droite d_i on compare q_{i-1} la solution pour les $i-1$ premières droites et d_k avec d_i en utilisant le prédicat précédent. Si q_{i-1} est du mauvais coté de d_i $q_i = d_i \cap d_k$ sinon $q_i = q_{i-1}$.

4.5

$p_k = d_l \cap d_{l'}$ pour $l, l' \leq k$ si les droites sont dans un ordre aléatoire on a $k = l$ avec probabilité $\frac{1}{k}$ et $k = l'$ avec la même probabilité. Donc une probabilité $\frac{2}{k}$ que $p_{k-1} \neq p_k$.

4.6

Pour passer de p_{k-1} à p_k on appelle une fois le prédicat pour décider dans quel cas on est, et avec probabilité $\frac{2}{k}$ on est dans le cas $p_{k-1} \neq p_k$ et on va appeler k fois le prédicat.

$$f(k) = f(k-1) + 1 + \frac{2}{k} k = f(k-1) + 3 \simeq 3n$$