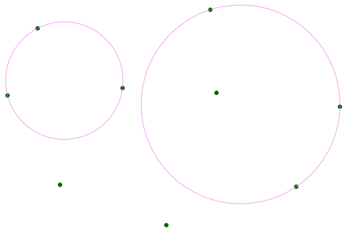
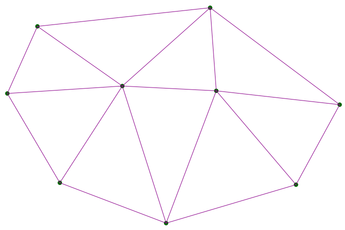
6 Exercices 13 octobre 2022.

6.1 Dessiner

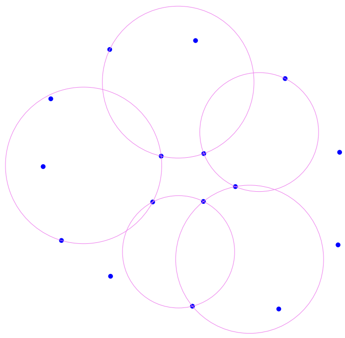
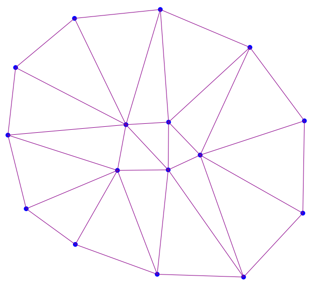
Triangulation de Delaunay

6.1 Correction:

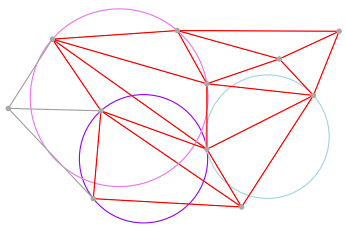
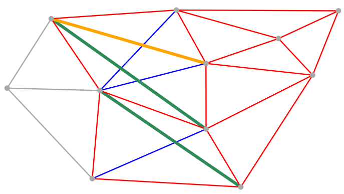
Triangulation de Delaunay

6.1 Correction:

Avec deux couleurs différentes (et en précisant la légende) dessiner les:
Arêtes non localement Delaunay
Arêtes localement Delaunay mais non globalement de Delaunay

6.1 Correction:

Vert: Arêtes non localement Delaunay
Orange: Arêtes localement Delaunay mais non globalement de Delaunay
Bleu et rouge: arêtes Delaunay

6.2 Triangulation bicolore

Soit S un ensemble de $2n$ points en position convexe. On choisit un sous-ensemble R de n points de S : les points rouges. Les points restants $B = S \setminus R$ étant bleus. On supposera les points en position générale (pas 3 points alignés, pas 4 cocycliques). On note $Del(S)$ la triangulation de Delaunay de S. On parlera d'arête rouge, bicolore ou bleue selon la couleur des extrémités.

1. Quel est en le nombre d'arêtes dans la triangulation de Delaunay de S ?

2. Comment colorier les points pour maximiser le nombre d'arêtes rouges dans $Del(S)$, quel nombre minimal peut-on obtenir ?
3. Un adversaire a colorié les points, trouvez un algorithme de triangulation (pas Delaunay) qui maximise le nombre d'arêtes rouges. Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
4. Vous choisissez les couleurs et la triangulation, comment minimier le nombre d'arêtes rouges ? Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
5. Un adversaire a colorié les points, trouvez un algorithme de triangulation (pas Delaunay) qui minimise le nombre d'arêtes rouges. Combien pouvez vous garantir d'en obtenir ?
6. *(Si vous vous ennuyez)* Comment colorier les points pour minimiser le nombre d'arêtes rouges dans $Del(S)$, quel nombre minimal peut-on obtenir ?

6.2 Correction:

1. La triangulation de Delaunay a $4n-3$ arêtes dont $2n$ sur l'enveloppe convexe et $2n-3$ internes.
2. Stratégie de coloriage. On commence par colorier les tris sommets d'un triangle en rouge, puis le sommet d'un triangle voisin en rouge, puis encore un triangle voisin en rouge jusqu'à ce que l'on ai colorié n points. On a alors une triangulation de n points rouges avec $2n-3$ arêtes rouges. On colorie les sommets restant en bleu.
3. Stratégie de triangulation. Trianguler les points rouges, puis ajouter les bleus sans détruire d'arêtes en reliant juste le point à ses deux voisins sur l'enveloppe convexe. On obtient $2n-3$ arêtes rouges.
4. Stratégie de coloriage et triangulation. On colorie un point sur deux le long de l'enveloppe convexe en rouge, On triangule les bleus et on ajoute les rouges. On obtient 2n-3 arêtes bleues, 2n arêtes bicolores et 0 rouges.
5. Stratégie de triangulation. On triangule tous les points bleus, il reste a trianguler des polygones convexes formés de deux points bleus consécutifs et de points rouges, on les triangulent en reliant un point bleu à tous les rouges. De cette manière toutes les arêtes internes de la triangulation sont bleues ou bicolores. Seules les arêtes rouges de l'enveloppe convexe sont rouges dans la triangulation. Le nombre de ces arêtes est entre 0 et $n-1$. On ne peut pas faire mieux puisque les arêtes de l'enveloppe convexe sont forcément dans toute triangulation.
6. Stratégie de coloriage. Une proposition (il y a probablement mieux): On colorie les points en alternant rouge et bleu le long de l'enveloppe, on obtient ainsi au moins $2n$ arêtes bicolores (celles de l'enveloppe convexe), donc au plus $2n-3$ arêtes monocolores. Si il y a plus d'arêtes rouges que de bleues, on échange les couleurs et comme ça on a un maximum de $n-\frac{3}{2}$ arêtes rouges.

6.3 Arithmetique des `double`

On suppose que l'arrondi est au plus proche `double`.

6.3.1 règles IEEE754

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si il est vrai ou faux. Si il est faux donner un contre exemple avec l'arithmétique jouet du cours (décimale à deux chiffres).

$$\begin{aligned}
a < b &\Leftrightarrow a - b < 0 & (1)\\
(a * b) * c &= a * (b * c) & (2)\\
a + b &= b + a & (3)\\
a * (b + c) &= a * b + a * c & (4)\\
x > y &\Rightarrow sqrt(x) > sqrt(y) & (5)\\
(\text{for } x, y \geq 0)\ \ x * x \geq y * y &\Rightarrow x \geq y & (6)\\
a, b, c \text{ entiers } \in [-2^{20}, 2^{20}] &\Rightarrow (a - b) * (a - c) = a * a - a * b - a * c + b * c & (7)
\end{aligned}$$

6.3.2 Multiplication

Si `(a<b)` est évalué à `true` et c est un autre nombre strictement positif.

— Est-ce que `a*c<b*c` est toujours vrai `true` ? (le démontrer ou écrire un contre exemple avec des nombres en binaires à 10 bits significatifs).

— Est-ce que `a*c<=b*c` est toujours vrai `true` ? (le démontrer ou écrire un contre exemple avec des nombres en binaires à 10 bits significatifs).

6.3.3 Des entiers dans des `double`

Soient $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ des entiers entre 0 et 2^b.

Trouver b pour que les expressions

$(x_2 - x_1) * (y_3 - y_1) - (x_3 - x_1) * (y_2 - y_1)$

et

$x_2 * y_3 + x_3 * y_1 + x_1 * y_2 - x_3 * y_2 - x_1 * y_3 - x_2 * y_1$

soit certainement évaluées à la même valeur si les calculs sont effectuées avec le type de nombre flottant à double précision.

6.3 Correction:

6.3.1 règles IEEE754

(1) vrai. Grace aux nombres dénormalisés.

(2) faux. $(26*26)*12 = 676*12 \simeq 680*12 = 8160 \simeq 8200 \neq 26*(26*12) = 26*312 \simeq 26*310 = 8060 \simeq 8100$.

(3) vrai. La valeur exacte est la même, l'arrondi est le même.

(4) faux. $2 * (52 + 54) = 2 * 106 \simeq 2 * 110 = 220 \neq 2 * 52 + 2 * 54 = 104 + 108 \simeq 100 + 110 = 220$.

(5) faux. $\sqrt{120} = 10.95 \to 11 \simeq \sqrt{130} = 11.40- \to 11$.

(6) vrai (pour les nombres normalisés). Pour trouver un contre exemple, il faut trouver des nombres tels que $x \neq y$ et $x^2 = y^2$, un candiat naturel est le nombre immédiatement supérieur à x. Si b est la base, un nombre s'écrit comme une mantisse $m \in [\frac{1}{b}, 1[$ multiplié par b^e où e est l'exposant. Si n est le nombre de chiffres significatifs, le nombre immédiatement supérieur à $x = m \cdot 2^e$ est $y = (m + b^{-n})b^e$. Pour que les carrés aient le même arrondi il faut (mais il ne suffit pas) que $y^2 - x^2 = (2m \cdot b^{-n} + b^{-2n})b^{2e}$ soit inférieur à l'écart entre deux nombres représentables au voisinage de x^2.

Si $m \in [\frac{1}{\sqrt{b}}, 1[$ alors la mantisse de x^2 est m^2, l'exposant b^{2e} et l'écart b^{2e-n}.

Si $m \in [\frac{1}{b}, \frac{1}{\sqrt{b}}[$ alors la mantisse de x^2 est $b \cdot m^2$, l'exposant 2^{2e-1} et l'écart b^{2e-n-1}.

Dans le deuxième cas, celà nous donne $(2m \cdot b^{-n} + b^{-2n})b^{2e} < b^{2e-n-1}$ ce qui revient à $2m < b^{-1}$ ou $m < \frac{2}{b}$. Mais comme $m > \frac{1}{b}$ on a une contradiction et on ne peut trouver de contre exemple dans ce cas.

Dans le premier cas, on veut $(2m \cdot b^{-n} + b^{-2n})b^{2e} < b^{2e-n}$ et donc $2m < 1$ ou $m < \frac{1}{2}$. En base 10 on peut prendre (par exemple) pour $m = 0.37 \in [\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{1}{2}[$ et vérifier que $0.37^2 = 0.1369$ et $0.38^2 = 0.1444$ s'arrondissent tous deux à 0.14. Par contre en base 2, l'intervalle $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}]$ est vide et on ne peut pas trouver de contre-exemple.
(7) vrai. Tous les nombres calculés sont des entiers $< 2^{54}$ ils sont donc représentés exactement.

6.3.2 Multiplication

`a*c<b*c` peut être `false`.

$$\begin{array}{rcl}
1.100\ldots0001 \times 1.100\ldots0001 & = & 10.010\ldots001100\ldots0001 \\
& \textit{round to} & 10.010\ldots010 \\
1.100\ldots0001 \times 1.100\ldots0010 & = & 10.010\ldots01001\ldots0010 \\
& \textit{round to} & 10.010\ldots010
\end{array}$$

`a*c<=b*c` est toujours `true`.

Les vraies valeurs de ac et bc sont dans le bon ordre. Leur plus proche valeurs representables ne peuvent s'inverser.

6.3.3 Des entiers dans des `double`

Ces expressions représentent toutes les deux des développements du déterminant $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$ en soustrayant la première colone aux autres ou en utilisant la règle de Sarrus. Le signe donne le prédicat d'orientation.

— Première expression:

$x_2 - x_1$ les expressions de ce genre utilisent au plus $b + 1$ bits

$(x_2 - x_1) * (y3 - y_1)$ les expressions de ce genre utilisent au plus $2b + 2$ bits

$(x_2 - x_1) * (y3 - y_1) - (x_3 - x_1) * (y_2 - y_1)$ utilise au plus $2b + 3$ bits

— Deuxième expresssion :

$x_2 * y_3$ les expressions de ce genre utilisent au plus $2b$ bits

$x_2 * y_3 + x_3 * y_1 + x_1 * y_2 - x_3 * y_2 - x_1 * y_3 - x_2 * y_1$ utilise au plus $2b + 3$ bits

Si $2b + 3 \leq 53$, c'est à dire $b \leq 25$, les deux calculs sont exacts puisque les double ont 53 bits significatifs. Si $b > 25$ les erreurs d'arrondis peuvent créer des différences entre les deux évaluations.

6.4 Gabriel, Delaunay et le graphe des demi-lunes

Étant donné un ensemble S de n points du plan, on dit que deux points a et b de S définissent une arête du graphe de Gabriel si le disque $D(a, b)$ de diamètre ab ne contient pas de points de S dans son intérieur. On notera G_S le graphe de Gabriel de S formé par toutes les arêtes de Gabriel. Une arête ab sera dans le graphe des demi-lunes L_S si au moins un des deux demi-disques formés en découpant $D(a, b)$ en deux par le segment ab est vide. On note D_S la triangulation de Delaunay de S. On note E_S l'enveloppe convexe de S.

6.4.1

Donner et démontrer des relations d'inclusion entre ces quatre graphes.

6.4.2

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel $L_S = D_S = G_S$.

6.4.3

Dessiner un exemple avec quelques points (au moins 6) dans lequel ces trois graphes sont tous différents.

6.4.4

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille (le nombre d'arêtes) de D_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

6.4.5

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de G_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

6.4.6

Donner des bornes supérieure et inférieure sur la taille de L_S et donner des exemples réalisant ces deux bornes.

6.4 Correction:

6.4.1

$E_S, G_S \subset D_S \subset L_S$

Une arête de D_S a un cercle vide, au moins un des demi-cercle de diamètre l'arête est inclus dedans et donc l'arête est aussi dans L_S. Une arête de Gabriel a un cercle vide (le cercle diamétral par définition de Gabriel) elle est donc de Delaunay. Une arête de l'enveloppe convexe est de Delaunay (elle a un cercle vide de très grand rayon). Une arête de Gabriel n'est pas forcément sur l'enveloppe convexe (dessiner juste un triangle obtus) ni le contraire (une arête de Gabriel intérieure à l'enveloppe convexe est facile à dessiner).

6.4.2

Par exemple un pentagone régulier et un point au centre.

6.4.3

Par exemple 6 points sur une demi-parabole

6.4.4

Delaunay a toujours $3n-3-k$ arêtes où k est la taille de l'enveloppe convexe, c'est donc toujours du $\Theta(n)$.

Si on veut quelque chose de plus précis on a comme borne supérieure $3n-6$ (mettre $n-3$ points comme on veut dans un triangle). Comme borne inférieure $2n-3$ avec n points comme on veut sur le bord d'un convexe.

6.4.5

Pour qu'une arête de Delaunay ne soit pas de Gabriel, il faut qu'un des triangles incident ait un angle obtus. Un triangle a au plus un angle obtus. Donc il y a au moins $(3n-3-k)-(2n-3-k)-n-1$ arêtes de Gabriel, un exemple est donné avec n points sur une demi-parabole. Il y a au plus $3n-6$ arêtes de Gabriel comme pour Delaunay, mais on est incapable d'atteindre cette borne car il est impossible d'éviter complètement les angles obtus si l'enveloppe convexe est un triangle. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$.

6.4.6

La borne inférieure est donnée par celle de Delaunay. Un maillage hexagonal va fournir une taille $3n-\Theta(\sqrt{n})$. La borne supérieure est quadratique, avec des points sur la demi-parabole, toute arête est dans L_S.