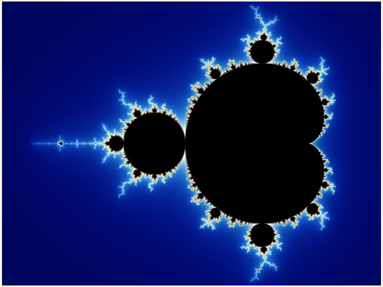
Approches algorithmiques des probabilités

Mathieu Hoyrup

LORIA

30 avril 2009

Calculabilité



L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?

Calculabilité

sur $\mathbb{R}$

Calculer un réel x

$$\boxed{\text{programme}} \longrightarrow q_0, q_1, q_2, \ldots$$

avec $d(q_n, x) < 2^{-n}$.

π, e sont calculables.

Calculabilité

sur les espaces métriques

Definition

(X, d, Q) est un **espace métrique effectif** si :

1. (X, d) espace métrique séparable,
2. $Q \subseteq X$ ensemble dénombrable dense,
3. $d(q, q')$ calculable à partir de q, q'.

Calculabilité

sur les espaces métriques

Definition

(X, d, Q) est un **espace métrique effectif** si :

1. (X, d) espace métrique séparable,
2. $Q \subseteq X$ ensemble dénombrable dense,
3. $d(q, q')$ calculable à partir de q, q'.

- $(\mathbb{R}^n, d, \mathbb{Q}^n)$,
- $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), d_H, \{\text{ensembles finis rationnels}\})$,
- $(\mathcal{C}([0,1]), \|.\|_\infty, \mathbb{Q}[X])$,
- $(\mathcal{M}(X), \pi, \{\text{combinaisons finies de diracs}\})$,
- ...

Calculabilité

sur les espaces métriques

(X, d, Q) espace métrique effectif.

Calculer un point $x \in X$

$$\boxed{\text{programme}} \longmapsto q_0, q_1, q_2, \ldots$$

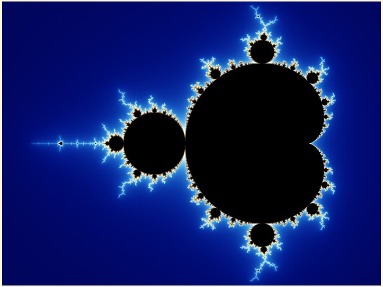
avec $d(q_n, x) < 2^{-n}$.

Calculer un ouvert $U \subseteq X$

$$\boxed{\text{programme}} \longmapsto B(q_0, r_0), B(q_1, r_1), \ldots$$

avec $U = \bigcup_n B(q_n, r_n)$.

Calculabilité

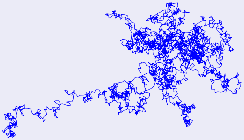


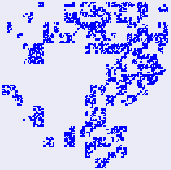
L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?

Calculabilité et probabilités

Pseudo-aléatoire

Calculer des éléments « ayant l'air aléatoire ».

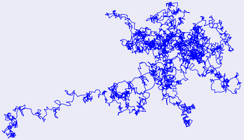


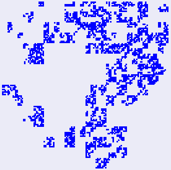


Calculabilité et probabilités

Pseudo-aléatoire

Calculer des éléments « ayant l'air aléatoire ».





Aléatoire

Définir ce qu'est un « élément aléatoire ».

Calculabilité et probabilités

Théorème

Sur un espace métrique, toute mesure de probabilité borélienne est régulière : si A *est un borélien et* $\epsilon > 0$*, alors il existe un fermé* F *et un ouvert* U *tels que :*

1. $F \subseteq A \subseteq U$,
2. $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.

1. Martin-Löf mesurabilité

2. Schnorr mesurabilité

Martin-Löf mesurabilité

Définition

Un ensemble A est **Martin-Löf μ-mesurable** s'il existe un programme qui sur l'entrée $\epsilon > 0$ calcule un fermé F et un ouvert U tels que :

1. $F \subseteq A \subseteq U$,
2. $\mu(U \setminus F) < \epsilon$.

Σ^{ML} : collection des ensembles ML μ-mesurables.

Remarque

Si A est ML μ-mesurable alors $\mu(A)$ est calculable.

Martin-Löf mesurabilité

En général, Σ^{ML} n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- *Σ^{ML} est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les A_i sont uniformément ML μ-mesurables et $\mu(\bigcup_i A_i)$ est calculable, alors $\bigcup_i A_i \in \Sigma^{ML}$.*

Martin-Löf mesurabilité

En général, Σ^{ML} n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- Σ^{ML} *est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les* A_i *sont uniformément ML* μ*-mesurables et* $\mu(\bigcup_i A_i)$ *est calculable, alors* $\bigcup_i A_i \in \Sigma^{ML}$.

Soit $\nu = \mu_{|\Sigma^{\mathrm{ML}}} : \Sigma^{\mathrm{ML}} \to [0,1]$. Faire des probabilités sur $(X, \Sigma^{\mathrm{ML}}, \nu)$?

Martin-Löf mesurabilité

En général, Σ^{ML} n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- *Σ^{ML} est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les A_i sont uniformément ML μ-mesurables et $\mu(\bigcup_i A_i)$ est calculable, alors $\bigcup_i A_i \in \Sigma^{ML}$.*

Soit $\nu = \mu_{|\Sigma^{\mathrm{ML}}} : \Sigma^{\mathrm{ML}} \to [0,1]$. Faire des probabilités sur $(X, \Sigma^{\mathrm{ML}}, \nu)$?

Lemme (Borel-Cantelli)

Si les A_i sont uniformément dans Σ^{ML} et $\sum_i \nu(A_i)$ est fini et calculable, alors

- $\limsup A_i := \bigcap_j \bigcup_{i>j} A_i$ *est dans* Σ^{ML},
- $\nu(\limsup A_i) = 0$.

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Théorème (Martin-Löf, 1966)

L'ensemble

$$R_\mu := \bigcap_{A \in \Sigma^{ML}, \mu(A)=1} A$$

est dans Σ^{ML}.

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Théorème (Martin-Löf, 1966)

L'ensemble

$$R_\mu := \bigcap_{A \in \Sigma^{ML}, \mu(A)=1} A$$

est dans Σ^{ML}.

Si $A \in \Sigma^{\mathrm{ML}}$ alors

$$\mu(A) = 1 \iff R_\mu \subseteq A.$$

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Théorème (Martin-Löf, 1966)

L'ensemble

$$R_\mu := \bigcap_{A \in \Sigma^{ML}, \mu(A)=1} A$$

est dans Σ^{ML}.

Si $A \in \Sigma^{\mathrm{ML}}$ alors

$$\mu(A) = 1 \iff R_\mu \subseteq A.$$

Borel-Cantelli 1

Si les A_i sont uniformément dans Σ^{ML} et $\sum_i \mu(A_i)$ est fini et calculable, alors $R_\mu \cap \limsup A_i = \emptyset$.

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} & \omega \in R_\mu \\ \iff & \exists c \forall n, K(\omega(0..n-1)) \geq -\log \mu[\omega(0..n-1)] - c \\ \iff & \exists c, \omega \in \mathcal{K}^c. \end{aligned}$$

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Sur $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$\begin{aligned} & \omega \in R_\mu \\ \iff & \exists c \forall n, K(\omega(0..n-1)) \geq -\log \mu[\omega(0..n-1)] - c \\ \iff & \exists c, \omega \in \mathcal{K}^c. \end{aligned}$$

Proposition (Borel-Cantelli 2)

Si les A_i sont uniformément dans Σ^{ML} et $\sum_i \mu(A_i)$ est fini et calculable, alors il existe une fonction calculable $i(c)$ telle que si $\omega \in \mathcal{K}^c$ alors $\omega \notin A_i$ pour tout $i \geq i(c)$.

Martin-Löf mesurabilité - Aléatoire

Corollaire (Loi (très) forte des grands nombres)

Il existe une fonction calculable $n(c, \epsilon)$ *telle que si* $\omega \in \mathcal{K}^c$ *alors*

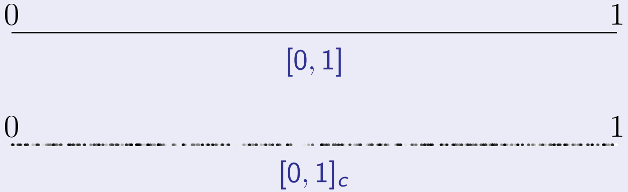
$$\left| \frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

pour tout $n \geq n(c, \epsilon)$.

Des probabilités constructives ?

Si $\mu(A) > 0$, peut-on construire (=calculer) un élément $x \in A$?

Des probabilités sur X_c ?



Schnorr mesurabilité

Définition

Un ensemble A est **Schnorr μ-mesurable** s'il existe un programme qui sur l'entrée $\epsilon > 0$ calcule un fermé F et un ouvert U tels que :

1. $F \subseteq A \subseteq U$,
2. $\mu(U \setminus F) < \epsilon$,

et **calcule $\mu(\mathbf{F})$ et $\mu(\mathbf{U})$**.

Σ^S : collection des ensembles Schnorr μ-mesurables.

Remarque

Si A est Schnorr μ-mesurable alors A est Martin-Löf μ-mesurable.

Schnorr mesurabilité

En général, Σ^S n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- Σ^S *est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les* A_i *sont uniformément Schnorr* μ*-mesurables et* $\mu(\bigcup_i A_i)$ *est calculable, alors* $\bigcup_i A_i \in \Sigma^S$.

Schnorr mesurabilité

En général, Σ^{S} n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- *Σ^{S} est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les A_i sont uniformément Schnorr μ-mesurables et $\mu(\bigcup_i A_i)$ est calculable, alors $\bigcup_i A_i \in \Sigma^{S}$.*

Soit $\nu = \mu_{|\Sigma^{\mathsf{S}}} : \Sigma^{\mathsf{S}} \to [0,1]$. Faire des probabilités sur $(X, \Sigma^{\mathsf{S}}, \nu)$?

Schnorr mesurabilité

En général, Σ^S n'est pas une σ-algèbre. Mais :

Lemme

- *Σ^S est une algèbre booléenne effective.*
- *Si les A_i sont uniformément Schnorr μ-mesurables et $\mu(\bigcup_i A_i)$ est calculable, alors $\bigcup_i A_i \in \Sigma^S$.*

Soit $\nu = \mu_{|\Sigma^S} : \Sigma^S \to [0,1]$. Faire des probabilités sur (X, Σ^S, ν) ?

Lemme (Borel-Cantelli)

Si les A_i sont uniformément dans Σ^S et $\sum_i \nu(A_i)$ est fini et calculable, alors

- $\limsup A_i$ *est dans* Σ^S,
- $\nu(\limsup A_i) = 0$.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Théorème

Si X complet, alors tout $A \in \Sigma^S$ tel que $\mu(A) > 0$ contient des points calculables.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Théorème

Si X complet, alors tout $A \in \Sigma^S$ tel que $\mu(A) > 0$ contient des points calculables.

Corollaire (Borel-Cantelli 3)

Si les A_i sont uniformément dans Σ^S et $\sum_i \mu(A_i)$ est fini et calculable, alors il existe des points calculables en dehors de $\limsup A_i$.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Théorème

Si X complet, alors tout $A \in \Sigma^S$ tel que $\mu(A) > 0$ contient des points calculables.

Corollaire (Borel-Cantelli 3)

Si les A_i sont uniformément dans Σ^S et $\sum_i \mu(A_i)$ est fini et calculable, alors il existe des points calculables en dehors de $\limsup A_i$.

Corollaire

Il existe des nombres réels absolument normaux calculables.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Faire des probabilités sur X_c

Soit X_c l'ensemble des points calculables de X, $A_c := A \cap X_c$, $\Sigma_c^{\mathsf{S}} := \{A_c : A \in \Sigma^{\mathsf{S}}\}$.

Proposition

La fonction

$$\begin{array}{rccc} \mu_c : & \Sigma_c^S & \longrightarrow & [0,1] \\ & A_c & \longmapsto & \mu(A) \end{array}$$

est bien définie.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Faire des probabilités sur X_c

Soit X_c l'ensemble des points calculables de X, $A_c := A \cap X_c$, $\Sigma_c^{\mathsf{S}} := \{A_c : A \in \Sigma^{\mathsf{S}}\}$.

Proposition

La fonction

$$\begin{array}{cccc} \mu_c : & \Sigma_c^S & \longrightarrow & [0,1] \\ & A_c & \longmapsto & \mu(A) \end{array}$$

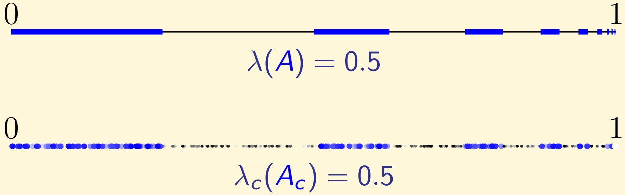
est bien définie.

Démonstration.

Si $A, B \in \Sigma^{\mathsf{S}}$ et $A_c = B_c$ alors $A \Delta B \in \Sigma^{\mathsf{S}}$ et $(A \Delta B)_c = \emptyset$ donc $\mu(A \Delta B) = 0$. Donc $\mu(A) = \mu(B)$. $\square$

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Faire des probabilités sur X_c



Lemme (Borel-Cantelli 4)

Si les A_i sont uniformément dans Σ_c^S et $\sum_i \mu_c(A_i)$ est fini et calculable, alors

- $\limsup A_i \in \Sigma_c^S$,
- $\mu_c(\limsup A_i) = 0$.

Schnorr mesurabilité - Pseudo-aléatoire

Faire des probabilités sur X_c

Corollaire

λ_c-presque tout réel calculable est absolument normal.

(c'est-à-dire, $\lambda_c(N_c) = 1$)

Exemple

Théorème de Birkhoff

Soit $T : X \to X$ une transformation qui préserve μ, ergodique. Soit Typ l'ensemble des points typiques, c'est-à-dire

$$x \in \mathrm{Typ} \iff \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i<n} \delta_{T^i x} \to \mu.$$

Ce que l'on sait

- Si T est calculable, Typ est Martin-Löf μ-mesurable.
- Si T est calculable et $\ln^2$-ergodique, Typ est Schnorr μ-mesurable.

Ce que l'on ne sait pas

- Si T est calculable, Typ est-il Schnorr μ-mesurable ?