Calculabilité sur les réels

Mathieu Hoyrup

EJCIM 2011, Amiens
30 mars 2011

Loria
Laboratoire lorrain de recherche en informatique et ses applications

INRIA

Définition

Un réel x est **calculable** s'il existe un programme $\mathtt{p}$ qui sur l'entrée $n \in \mathbb{N}$ renvoie un rationnel q_n tel que

$$|q_n - x| < 2^{-n}.$$

On dit alors que $\mathtt{p}$ **calcule** x.

De manière équivalente, x est calculable s'il existe un programme $\mathtt{p}$ qui sur l'entrée $\epsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$ renvoie un rationnel q tel que $|q - x| < \epsilon$.

Exemple 1

Le nombre π est calculable. En effet,

$$\pi = 4\arctan(1) = 4\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{formule de Leibniz.}$$

Voici un programme $\mathtt{p}$ calculant π à toute précision : sur l'entrée n, $\mathtt{p}$ calcule et renvoie

$$q_n = 4\sum_{k=0}^{2^{n+1}}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Exemple 2

Tout nombre algébrique est calculable.

Indécidabilité de l'égalité à 0

Théorème

Il n'existe pas d'algorithme $\mathscr{A}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout programme $\mathtt{p}$ calculant x,

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\mathtt{p}) &= 1 \quad \textit{si } x = 0, \\ \mathscr{A}(\mathtt{p}) &= 0 \quad \textit{si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Indécidabilité de l'égalité à 0

Démonstration.

Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, construisons le programme $\mathtt{p}_k$ suivant :

- `Sur l'entrée` n,
- `simuler les` n `premières étapes de` M_k.
- `Si` M_k `ne s'est pas arrêtée, renvoyer` 0.
- `Si` M_k `s'est arrêté en` $t \leq n$ `étapes, renvoyer` 2^{-t}.

Le programme $\mathtt{p}_k$ calcule un réel x_k, vérifiant

$$x_k = 0 \iff M_k \text{ ne s'arrête pas.}$$

Le programme $\mathtt{p}_k$ peut être généré automatiquement à partir de k, donc décider $x_k = 0$ permettrait de décider le problème de l'arrêt. □

Semi-décidabilité de la comparaison

Proposition

Il existe un algorithme $\mathscr{A}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout programme p calculant x,

$$\begin{array}{rcrl} \mathscr{A}(p) & = & 1 & \text{si } x > 0, \\ \mathscr{A}(p) & = & -1 & \text{si } x < 0, \\ \mathscr{A}(p) & & \text{boucle} & \text{si } x = 0. \end{array}$$

Semi-décidabilité de la comparaison

Proposition

Il existe un algorithme $\mathscr{A}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout programme p calculant x,

$$\begin{array}{rcrl} \mathscr{A}(p) & = & 1 & \text{si } x > 0, \\ \mathscr{A}(p) & = & -1 & \text{si } x < 0, \\ \mathscr{A}(p) & & \text{boucle} & \text{si } x = 0. \end{array}$$

Démonstration.

L'algorithme calcule les approximations q_n de x et s'arrête lorsqu'il trouve un n tel que

$$|q_n| > 2^{-n},$$

et renvoie le signe de q_n. $\square$

Corollaire

Un réel x est calculable si et seulement s'il a une représentation décimale calculable.

Démonstration.

Si x est calculable, alors il y a 2 cas :

- $x = n, x_1 x_2 \dots x_p$ est décimal, ses 2 représentations décimales $n, x_1 \dots x_p 000\dots$ et $n, x_1 \dots (x_p - 1)999\dots$ sont calculables ($x_p \neq 0$)
- x n'est pas décimal. Si $x \in [0, 1]$, comme $x \notin \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ on peut décider où se situe x et donc calculer le premier bit de x etc.

Réciproquement si x a une représentation décimale $n, x_1 x_2 x_3 \dots$ calculable, alors les troncatures n, n, x_1, $n, x_1 x_2$ etc. forment une suite calculable d'approximations de x. □

Uniformité

$$\exists \texttt{p} \text{ calculant } x \iff \exists \texttt{p'} \text{ calculant la rep. décimale de } x.$$

La conversion de `p'` en `p` est uniforme, mais pas la conversion de `p` en `p'`.

Un réel non calculable

Rappel

L'ensemble de l'arrêt

$$\mathbb{K} = \{\langle e, x\rangle | \varphi_e(x) \downarrow\}$$

n'est pas décidable.

Corollaire

Le réel

$$k = \sum_{n \in \mathbb{K}} 2^{-n}$$

n'est pas calculable.

Démonstration.

Si k était calculable, sa représentation binaire le serait, donc $\mathbb{K}$ serait décidable. $\square$

Calculabilité des réels

Calculabilité des fonctions réelles

- au sens interactif
- au sens syntaxique
- Fonctions $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculables

Calculabilité des ensembles

- Définitions générales
- L'ensemble de Mandelbrot
- Les ensembles de Julia

Quelques directions

Un **algorithme interactif** est un algorithme qui, au cours de son exécution, peut poser des questions à l'utilisateur, du type

`Que vaut x à` 2^{-p} `près ?`

(où $p \in \mathbb{N}$)

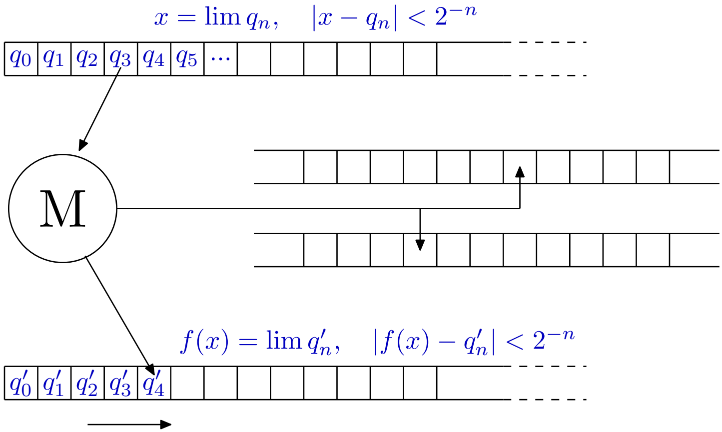
Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est **calculable** s'il existe un algorithme interactif qui sur l'entrée n renvoie un rationnel q vérifiant

$$|q - f(x)| < 2^{-n}.$$

Autre manière de voir : la machine à oracle

La machine M calcule $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

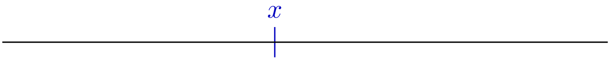


Théorème

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *calculable est continue.*

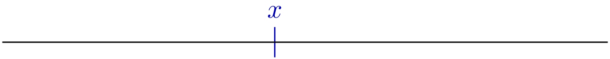
Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$



Preuve de la continuité de f en x

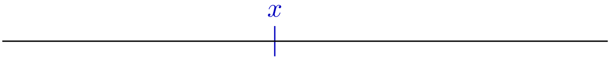
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.

?

Preuve de la continuité de f en x

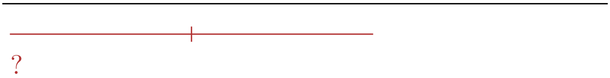
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.

Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

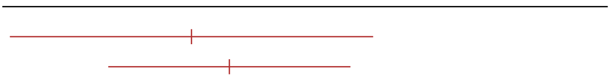
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

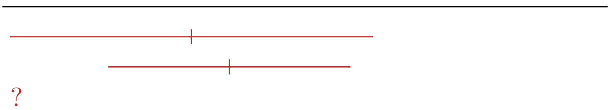
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

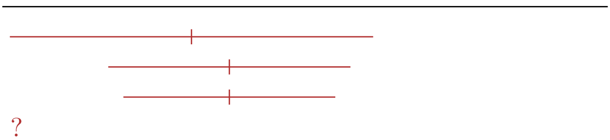
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.

Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

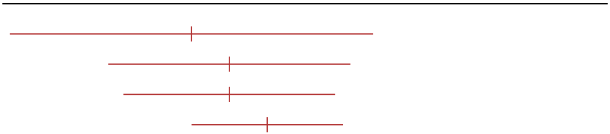
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

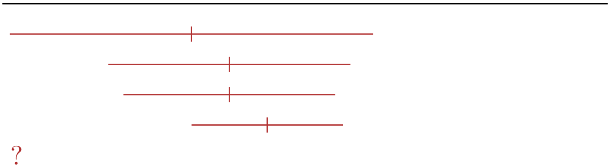
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

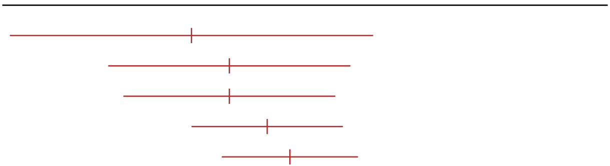
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

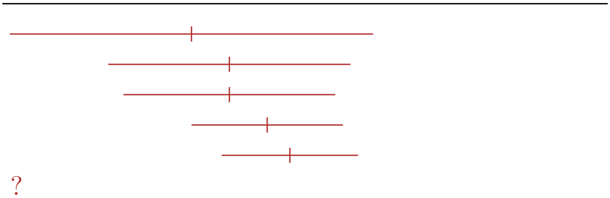
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

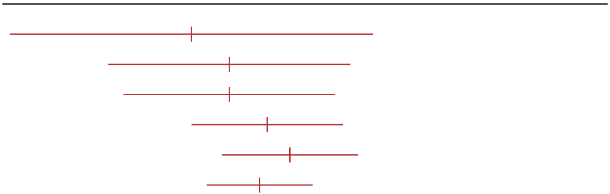
Calcul de $f(x)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.

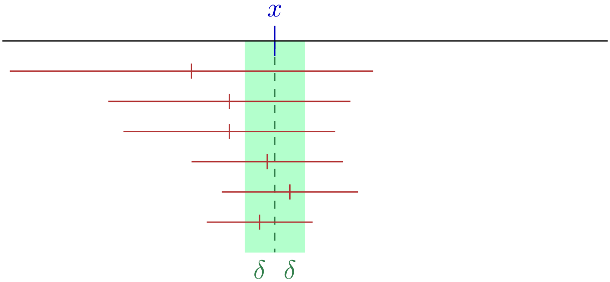


$\rightsquigarrow$ q vérifiant $|q - f(x)| < \epsilon/2$

Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.

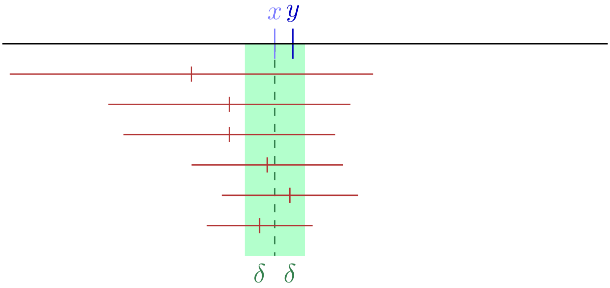


$\rightsquigarrow$ q vérifiant $|q - f(x)| < \epsilon/2$

Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

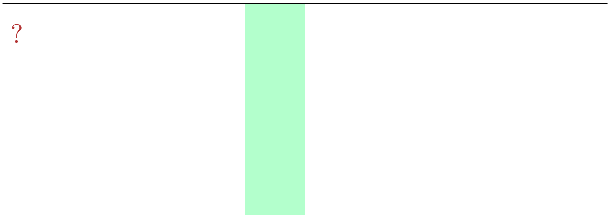
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

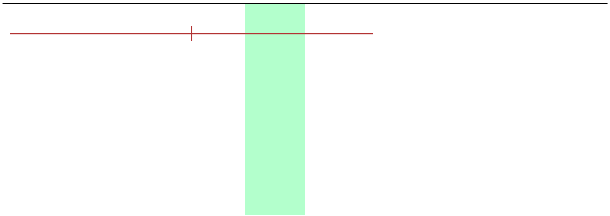
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

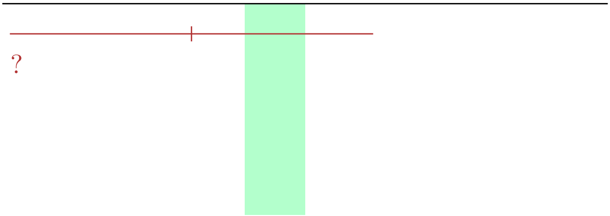
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

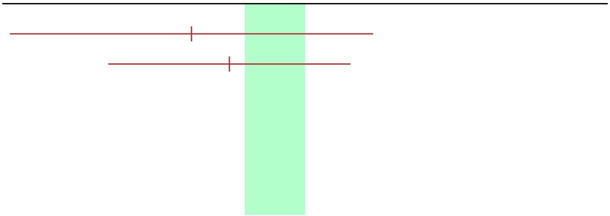
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

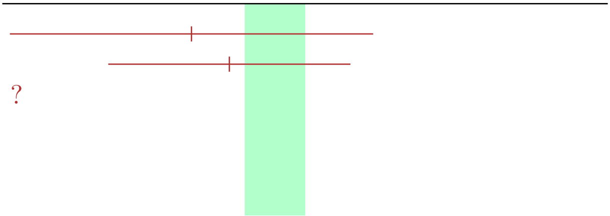
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

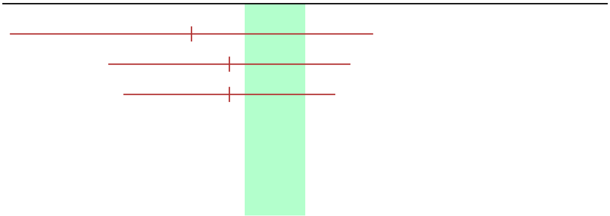
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

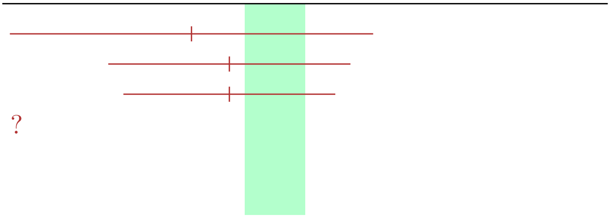
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

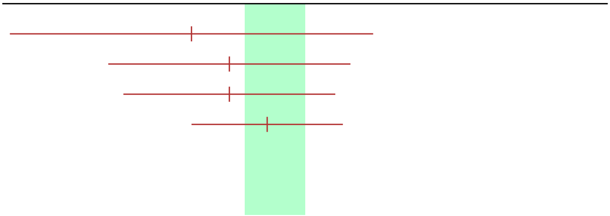
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

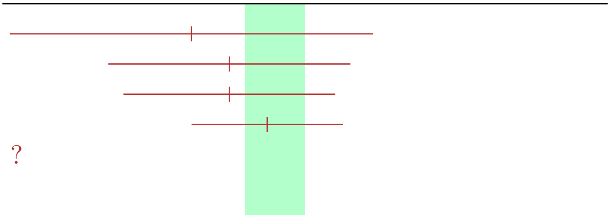
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

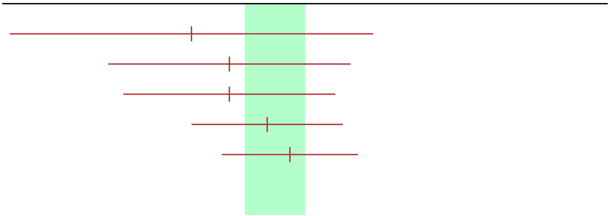
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

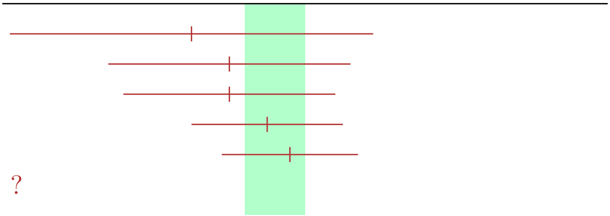
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

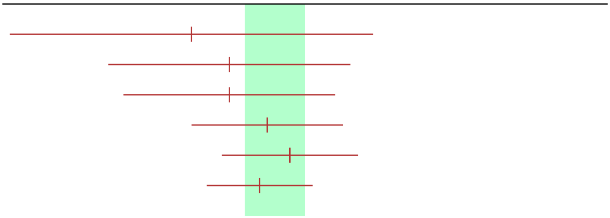
Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



Preuve de la continuité de f en x

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y, |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Calcul de $f(y)$ à précision $\epsilon/2$.



$\rightsquigarrow$ *le même* q, vérifiant $|q - f(y)| < \epsilon/2$.

Corollaire

Les seuls sous-ensembles décidables de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

En effet, les seuls ensembles $A \subseteq \mathbb{R}$ dont la fonction caractéristique χ_A est continue sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.

Proposition

Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel calculable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction calculable alors $f(x)$ est un réel calculable.

Proposition

Si $x \in \mathbb{R}$ est un réel calculable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction calculable alors $f(x)$ est un réel calculable.

Démonstration.

Soit

- `p` un programme calculant x,
- $\mathscr{A}$ un algorithme interactif calculant f.

Il suffit de brancher la sortie de `p` sur l'entrée de $\mathscr{A}$ pour obtenir un programme calculant $f(x)$. Autrement dit, on fait interagir $\mathscr{A}$ avec l'utilisateur virtuel `p`. Cette combinaison de `p` et de $\mathscr{A}$ est un programme `p'` calculant $f(x)$. □

Remarque

Cela donne une manière automatique de transformer un programme `p` calculant x en un programme `p'` calculant $f(x)$.

Autre définition

Ceci nous mène à introduire une autre notion de fonction calculable.

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ est **syntaxiquement calculable** s'il existe un algorithme $\mathscr{A}$ tel que

- pour tout $x \in \mathbb{R}$
- et tout programme $\mathtt{p}$ calculant x,

$$\mathscr{A}(\mathtt{p}) \rightsquigarrow \mathtt{p'}$$

où $\mathtt{p'}$ est un programme calculant $f(x)$.

Les deux notions de fonction calculable reposent sur deux présentations différentes des réels :

- la manière interactive : le réel est fourni petit à petit à l'algorithme,
- la manière syntaxique : le réel est fourni « en une fois » à l'algorithme.

L'algorithme syntaxique a donc au moins autant d'information que l'algorithme interactif, il peut calculer au moins autant, comme on l'a vu :

Proposition

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calculable de manière interactive, la restriction $f_c : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ est calculable de manière syntaxique.

Peut-il calculer strictement plus ?

Les deux notions de fonction calculable reposent sur deux présentations différentes des réels :

- la manière interactive : le réel est fourni petit à petit à l'algorithme,
- la manière syntaxique : le réel est fourni « en une fois » à l'algorithme.

L'algorithme syntaxique a donc au moins autant d'information que l'algorithme interactif, il peut calculer au moins autant, comme on l'a vu :

Proposition

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calculable de manière interactive, la restriction $f_c : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ est calculable de manière syntaxique.

Peut-il calculer strictement plus ?

Réponse

Oui et non.

Non

Oui

Non

Théorème

Il existe une fonction $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculable sur $\mathbb{R}_c$ qui ne peut pas s'étendre à une fonction calculable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Oui

Non

Théorème

Il existe une fonction $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculable sur $\mathbb{R}_c$ qui ne peut pas s'étendre à une fonction calculable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Oui

Théorème (Kreisel-Lacombe-Shœnfield, 1957)

Une fonction $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ est calculable au sens syntaxique si et seulement si elle est calculable de manière interactive, sur $\mathbb{R}_c$.

Attention

f n'est définie que sur $\mathbb{R}_c$: l'algorithme interactif ne fonctionne correctement que si l'utilisateur fournit des approximations d'un réel *calculable*. Il peut se comporter de manière incohérente, ou boucler, si l'utilisateur produit des approximations d'un réel non calculable.

Pour résumer,

- il y a une seule notion de calculabilité pour les fonctions $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$: les algorithmes syntaxiques et interactifs calculent exactement les mêmes fonctions.
- l'ensemle des restrictions à $\mathbb{R}_c$ de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calculables est strictement inclus dans l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculables.

Pour résumer,

- il y a une seule notion de calculabilité pour les fonctions $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$: les algorithmes syntaxiques et interactifs calculent exactement les mêmes fonctions.
- l'ensemle des restrictions à $\mathbb{R}_c$ de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calculables est strictement inclus dans l'ensemble des fonctions $\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculables.

Quelles propriétés ont les fonctions $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculables ?

Nous avons déjà montré que la fonction $\delta_0 : \mathbb{R}_c \to \{0,1\}$ définie par

$$\begin{aligned} \delta_0(x) &= 1 \quad \text{si } x = 0, \\ \delta_0(x) &= 0 \quad \text{si } x \neq 0, \end{aligned}$$

n'est pas (syntaxiquement) calculable. Plus généralement,

Théorème

Toute fonction $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculable est continue.

Démonstration.

Une discontinuité de f pourrait être exploitée pour résoudre l'arrêt. $\square$

Quid des ensembles $A \subseteq \mathbb{R}_c$ décidables ?

Ici, la continuité de $\chi_A : \mathbb{R}_c \to \{0, 1\}$ est moins limitative : il existe des ensembles A non-triviaux tels que χ_A est continue.

(par exemple, si $x \notin \mathbb{R}_c$ alors $\chi_{[0,x]}$ est continue sur $\mathbb{R}_c$)

Quid des ensembles $A \subseteq \mathbb{R}_c$ décidables ?

Ici, la continuité de $\chi_A : \mathbb{R}_c \to \{0, 1\}$ est moins limitative : il existe des ensembles A non-triviaux tels que χ_A est continue.

(par exemple, si $x \notin \mathbb{R}_c$ alors $\chi_{[0,x]}$ est continue sur $\mathbb{R}_c$)

Théorème

Les seuls ensembles $A \subseteq \mathbb{R}_c$ décidables sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}_c$.

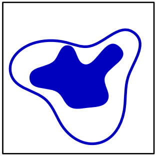
Démonstration.

Si $a_0 \in A$ et $b_0 \in \mathbb{R}_c \setminus A$, par dichotomies successives on obtient deux suites adjacentes a_n, b_n convergeant vers un même réel calculable x, telles que $a_n \in A$ et $b_n \in \mathbb{R}_c \setminus A$ pour tout n. Alors $x \in A$ et $x \notin A$: contradiction. $\square$

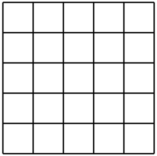
	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ calculable
χ_A	$A = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$	$A = \emptyset$ ou $\mathbb{R}$
bornée sur $[0, 1]$?	oui	oui
thm valeurs intermédiaires	oui	oui

	$\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ continue	$\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$ calculable
χ_A	beaucoup de A	$A = \emptyset$ ou $\mathbb{R}_c$
bornée sur $[0, 1]_c$?	non	non
thm valeurs intermédiaires	non	oui (v.i. calculables)

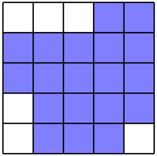
Etant donné un ensemble $A \subseteq [0,1]^2$, et un maillage de $[0,1]^2$ de résolution $1/n$ (avec $n \in \mathbb{N}$), une version pixélisée possible de A consiste à colorer les pixels qui intersectent A.



A



maillage $\frac{1}{5}$



version pixélisée de A.

On peut considérer les pixels fermés, ouverts ou semi-ouverts :

$$\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right] \text{ ou } \left(\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right) \times \left(\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right) \text{ ou } \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right) \times \left[\frac{j}{n}, \frac{j+1}{n}\right).$$

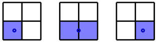
Quel que soit le choix, il n'existe pas d'algorithme qui prenne en entrée

- un programme $\mathtt{p}$ calculant un réel x,
- un entier $n \geq 1$,

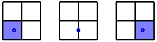
et dessine la version pixélisée du point $A_x := \{(x, \frac{1}{4})\}$ à résolution $\frac{1}{n}$.

En effet, pour $n = 2$ cela permettrait de décider $x \geq \frac{1}{2}$:

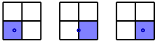
$$x \geq \tfrac{1}{2} \iff A_x \cap \left[\tfrac{1}{2}, 1\right] \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right] \neq \emptyset$$



$$\iff A_x \cap \left(0, \tfrac{1}{2}\right) \times \left(0, \tfrac{1}{2}\right) = \emptyset$$



$$\iff A_x \cap \left[0, \tfrac{1}{2}\right) \times \left[0, \tfrac{1}{2}\right) = \emptyset.$$



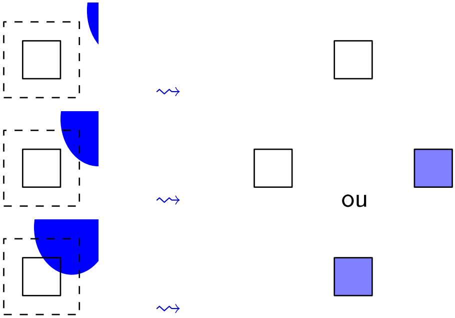
La solution consiste à autoriser une marge d'erreur.
La version pixélisée de A dessinée par le programme sera une sur-approximation de A, mais contrôlée.

- Si un pixel intersecte A, il est coloré.
- Si un pixel est coloré, il n'intersecte pas forcément A, mais doit être proche de A.

Désormais un pixel est toujours *fermé*.

Définition

Le **voisinage** d'un pixel est le carré *ouvert* de même centre et de côté double.
Un pixel est **loin de** A si A n'intersecte pas son voisinage.



Le pixel (fermé) intersecte $\Longrightarrow$ le pixel est coloré $\Longrightarrow$ le voisinage (ouvert) intersecte.

Définition

Un ensemble $A \subseteq [0,1]^2$ est **calculable** s'il existe un programme qui sur l'entrée n, dessine une version pixélisée de A vérifiant :

- si un pixel intersecte A, il est coloré,
- si un pixel est loin de A, il n'est pas coloré.

Remarque

Si A n'intersecte pas un pixel mais intersecte son voisinage, le pixel peut être coloré ou non.

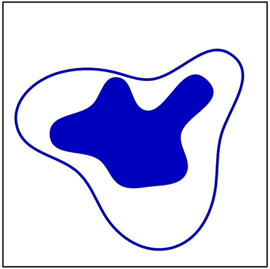
Définition

Un ensemble $A \subseteq [0,1]^2$ est **calculable** s'il existe un programme qui sur l'entrée n, dessine une version pixélisée de A vérifiant :

- si un pixel intersecte A, il est coloré,
- si un pixel est loin de A, il n'est pas coloré.

Remarque

Si A n'intersecte pas un pixel mais intersecte son voisinage, le pixel peut être coloré ou non.



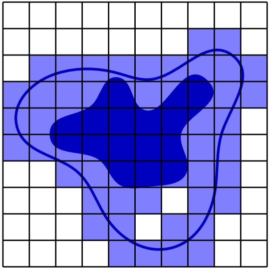
Définition

Un ensemble $A \subseteq [0,1]^2$ est **calculable** s'il existe un programme qui sur l'entrée n, dessine une version pixélisée de A vérifiant :

- si un pixel intersecte A, il est coloré,
- si un pixel est loin de A, il n'est pas coloré.

Remarque

Si A n'intersecte pas un pixel mais intersecte son voisinage, le pixel peut être coloré ou non.



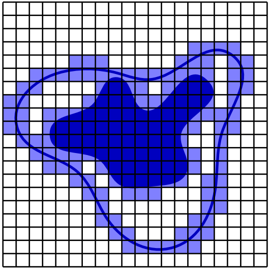
Définition

Un ensemble $A \subseteq [0,1]^2$ est **calculable** s'il existe un programme qui sur l'entrée n, dessine une version pixélisée de A vérifiant :

- si un pixel intersecte A, il est coloré,
- si un pixel est loin de A, il n'est pas coloré.

Remarque

Si A n'intersecte pas un pixel mais intersecte son voisinage, le pixel peut être coloré ou non.



La distance de Hausdorff entre deux ensembles $A, B \subseteq [0,1]^2$ est

$$d_{\text{Hausdorff}}(A, B) = \max\{d_0(A, B), d_0(B, A)\}.$$

où

$$d_0(A, B) = \sup_{a \in A} \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Proposition

La version pixélisée de A à résolution $\frac{1}{n}$ est un ensemble B vérifiant

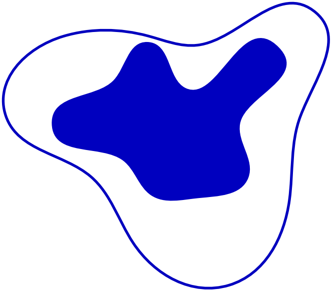
$$d_{Hausdorff}(A, B) \leq \frac{3}{n\sqrt{2}}.$$

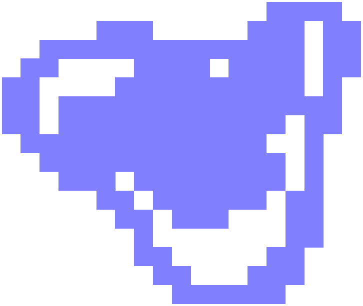
Démonstration.

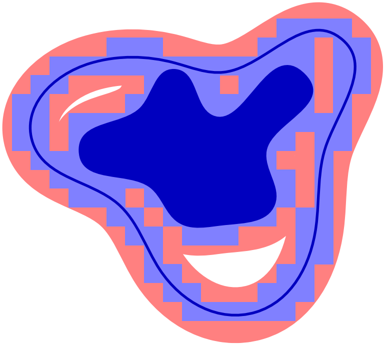
En effet,

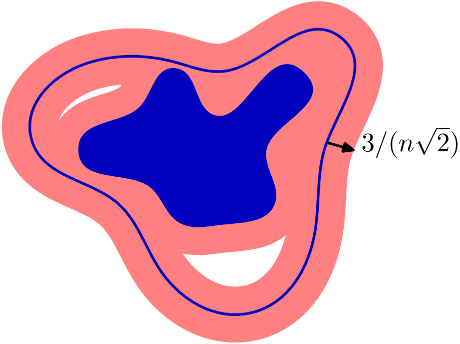
- $A \subseteq B$ donc $d_0(A, B) = 0$,
- si $b \in B$ alors A intersecte le voisinage du pixel dans lequel b se trouve, donc $d(b, A) < \frac{3}{n\sqrt{2}}$. Ainsi $d_0(B, A) \leq \frac{3}{n\sqrt{2}}$.

$\square$








$3/(n\sqrt{2})$

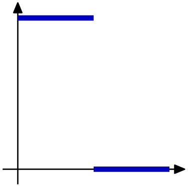
Quelques résultats

Calculer une fonction permet de la tracer.

Proposition

Le graphe de toute fonction calculable $f : [0,1] \to [0,1]$ *est un ensemble calculable.*

Mais certaines fonctions peuvent être tracées sans être pour autant calculables :



Les notions de fonctions calculables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_c$) peuvent se généraliser à

$$\mathbb{R} \to \mathcal{P}([0,1]^2),$$
$$\mathcal{P}([0,1]^2) \to \mathbb{R},$$
$$\mathcal{P}([0,1]^2) \to \mathcal{P}([0,1]^2).$$

Par exemple,

Définition

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}([0,1]^2)$ est calculable s'il existe un algorithme interactif $\mathscr{A}$ tel que

- pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
- $\mathscr{A}(n)$ dessine $f(x)$ à résolution $\frac{1}{n}$.

La fonction $x \mapsto \{(x, \frac{1}{4})\}$ est calculable.

Exemples

- L'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \cup : & \mathcal{P}([0,1]^2) \times \mathcal{P}([0,1]^2) & \longrightarrow & \mathcal{P}([0,1]^2) \\ & (A, B) & \longmapsto & A \cup B \end{array}$$

  est calculable.
- La fonction $\mathrm{diam} : \mathcal{P}([0,1]^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ est calculable.
- Mais l'opérateur $\cap : \mathcal{P}([0,1]^2) \times \mathcal{P}([0,1]^2) \longrightarrow \mathcal{P}([0,1]^2)$ n'est pas calculable !

Exemples

- L'opérateur

$$\begin{array}{rccc} \cup : & \mathcal{P}([0,1]^2) \times \mathcal{P}([0,1]^2) & \to & \mathcal{P}([0,1]^2) \\ & (A, B) & \mapsto & A \cup B \end{array}$$

  est calculable.
- La fonction $\text{diam} : \mathcal{P}([0,1]^2) \to \mathbb{R}$ est calculable.
- Mais l'opérateur $\cap : \mathcal{P}([0,1]^2) \times \mathcal{P}([0,1]^2) \to \mathcal{P}([0,1]^2)$ n'est pas calculable !

Théorème

Toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathcal{P}([0,1]^2)$ calculable est continue, c'est–dire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, |x - y| < \delta \implies d_{Hausdorff}(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

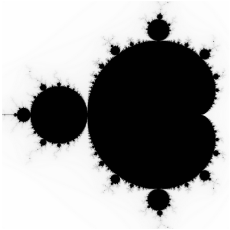
L'ensemble de Mandelbrot

Etant donné $c \in \mathbb{C}$, on définit la suite $(z_n(c))_{n \in \mathbb{N}}$ de cette manière :

$$\begin{aligned} z_0(c) &= 0 \\ z_{n+1}(c) &= z_n(c)^2 + c. \end{aligned}$$

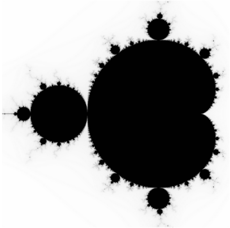
L'ensemble de Mandelbrot est défini par

$$\mathscr{M} = \{c : \text{ la suite } z_n(c) \text{ est bornée}\}.$$



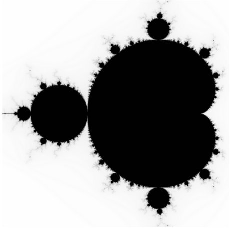
L'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?



L'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?

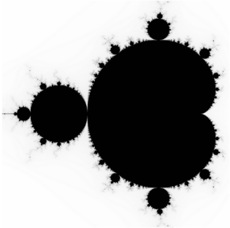


Réponse

On ne sait pas !

L'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?



Réponse

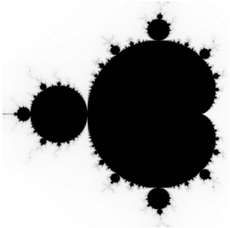
On ne sait pas !

Proposition

Il existe un programme qui petit à petit, colore en blanc l'extérieur de $\mathscr{M}$.

L'ensemble de Mandelbrot

L'ensemble de Mandelbrot est-il calculable ?



Réponse

On ne sait pas !

Proposition

Il existe un programme qui petit à petit, colore en blanc l'extérieur de $\mathscr{M}$.

Théorème (Hertling, 2005)

Si la conjecture d'hyperbolicité est vraie, alors $\mathscr{M}$ est calculable.

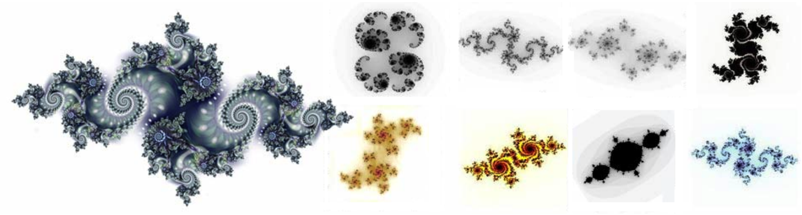
Les ensembles de Julia

Cette fois on fixe $c \in \mathbb{C}$ et on fait varier z_0. Pour chaque $z_0 \in \mathbb{C}$ on définit de même la suite $(z_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$z_{n+1}(c) = z_n(c)^2 + c.$$

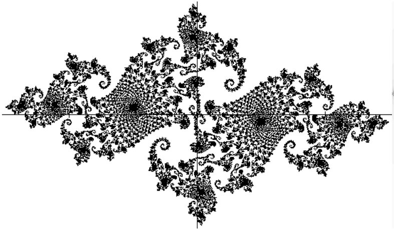
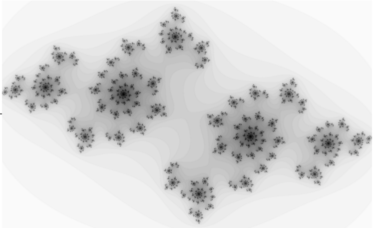
L'ensemble de Julia associé à c est défini par

$$\mathscr{J}_c = \{z_0 : \text{ la suite } z_n(c) \text{ est bornée}\}.$$



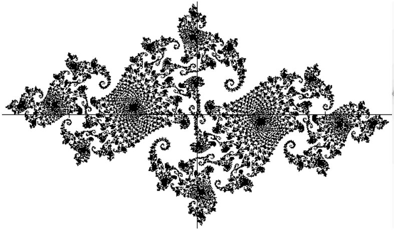
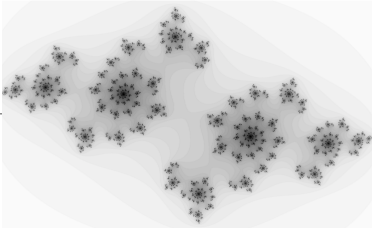
Les ensembles de Julia

L'ensemble de Julia $\mathscr{J}_c$ est-il calculable à partir de c ?

Les ensembles de Julia

L'ensemble de Julia $\mathscr{J}_c$ est-il calculable à partir de c ?

Réponse

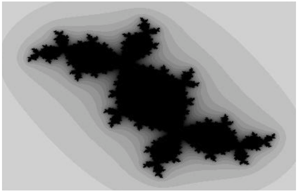
Oui, mais.

Théorème (Braverman et Yampolsky, 2008)

1. *Pour tout c calculable, $\mathscr{J}_c$ est calculable.*
2. *Pour tout c, il existe un algorithme interactif qui calcule $\mathscr{J}_c$ à partir de c (fourni par l'utilisateur).*
3. *<u>Mais</u> la fonction $c \mapsto \mathscr{J}_c$ n'est pas calculable, car elle n'est pas continue.*

Remarque

Notez l'ordre des quantificateurs du point 2. Le point 3. dit qu'on ne peut pas inverser ces quantificateurs : il n'existe pas d'algorithme interactif qui, pour tout c, calculerait $\mathscr{J}_c$ à partir de c.

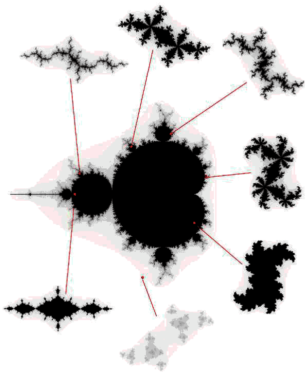


En fait,

Théorème (Braverman et Yampolsky, 2008)

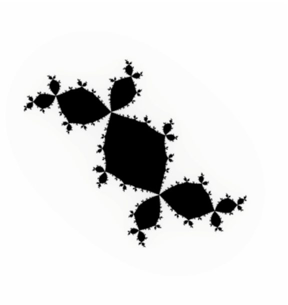
*Il existe **deux** algorithmes interactifs $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{A}_2$, tels que pour tout c, l'un d'eux calcule $\mathscr{J}_c$ à partir de c. Plus précisément,*

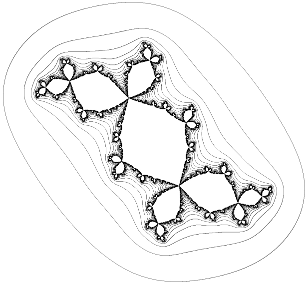
- *si $c \in \mathscr{M}$ alors $\mathscr{A}_1(c)$ calcule $\mathscr{J}_c$,*
- *si $c \notin \mathscr{M}$ alors $\mathscr{A}_2(c)$ calcule $\mathscr{J}_c$.*



La fonction $c \mapsto \mathscr{J}_c$

L’ensemble de Julia creux





En revanche,

Théorème (Braverman, Yampolsky, 2006)

Il existe $c \in \mathbb{C}$ calculable dont l’ensemble de Julia creux associé n’est pas calculable.

Théorème (Braverman, Yampolsky, 2006)

L’ensemble de Julia creux est toujours calculable « de l’intérieur ».

Quelques directions

- Complexité : réels, fonctions, ensembles calculables en temps/espace polynomial.
- Systèmes dynamiques continus : comparaison du système et de sa partie calculable.
- Liens avec la logique, la théorie de la preuve, l'analyse constructive.
- Programmation certifiée.

Mark Braverman and Michael Yampolsky.
Computability of Julia Sets.
Springer, 2008.

Peter Hertling.
Is the Mandelbrot set computable ?
Mathematical Logic Quarterly, 51(1) :5–18, 2005.

Ker-I Ko.
Complexity Theory of Real Functions.
Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1991.

Klaus Weihrauch.
Computable Analysis.
Springer, Berlin, 2000.

Bonus

Théorème

Il existe une fonction $f : [0,1]_c \to \mathbb{R}_c$ *calculable sur* $[0,1]_c$ *qui ne peut pas s'étendre à une fonction calculable* $[0,1] \to \mathbb{R}$.

Lemme

Il existe un programme énumérant une suite d'intervalles rationnels (a_n, b_n) *recouvrant* $[0,1]_c$ *mais pas* $[0,1]$.

1. Construction des (a_n, b_n).

Soit $E \subseteq \mathbb{N}$ défini par

$$E = \{k : M_k(k) = \langle a, b \rangle \text{ avec } 0 < b - a < 2^{-k-2}\}.$$

E est r.e. Soit $k_0, k_1, \ldots$ une énumération calculable de E : on définit

$$\langle a_n, b_n \rangle := M_{k_n}(k_n).$$

$\square$

Soit $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(a_n, b_n)$.

2. Preuve que U ne recouvre pas l'intervalle.

$$\begin{aligned} m(U) &\leq \sum_n b_n - a_n \\ &\leq \sum_{k\in E} 2^{-k-2} \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k-2} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

3. Preuve que U contient tous les réels calculables.

Si x est un réel calculable, il existe une machine M qui sur l'entrée n produit deux rationnels $a < b$ tels que $b - a < 2^{-n-2}$ et $x \in (a, b)$. Cette machine a un indice $M = M_k$. Alors $k \in E$, donc $x \in U$. $\square$

Construction de f

Notons $I_n = (a_n, b_n)$. On définit f par morceaux, sur I_0, puis $I_1 \setminus I_0$, puis $I_2 \setminus (I_0 \cup I_1)$ etc.

- $f = 0$ sur I_0,
- si $I_n \setminus (I_0 \cup \ldots \cup I_{n-1})$ est vide, on n'a rien à faire,
- si $I_n \setminus (I_0 \cup \ldots \cup I_{n-1})$ est d'intérieur vide, on prolonge f par continuité,
- si $I_n \setminus (I_0 \cup \ldots \cup I_{n-1})$ contient un intervalle ouvert $[a, b]$ avec $a < b$, on pose $f = n$ sur $[a, b]$ et on la prolonge linéairement ailleurs.

f est calculable : étant donné un réel calculable x, on sait qu'il existe n tel que $x \in I_n$. Puisqu'on peut semi-décider $x \in I_n$, on finira par trouver un tel n. On connaît alors f sur I_n, on peut calculer $f(x)$.
f n'est pas prolongeable en une fonction continue, car alors elle serait bornée.