

CURRICULUM VITÆ DÉTAILLÉ

YVES GUIRAUD

INFORMATIONS PERSONNELLES

Situation professionnelle

Statut Chargé de recherche INRIA, Équipe-Projet Paréo
Laboratoire Laboratoire Lorrain de Recherche en Informatique et Applications (LORIA),
UMR 7503, Nancy

Coordonnées

Adresse INRIA Nancy – Bâtiment B – Paréo
615 rue du Jardin Botanique – CS 20101
54603 Villers-lès-Nancy Cedex
Téléphone 03.54.95.85.66 – 06.42.95.54.20
Fax 03.54.95.84.01
Adresse électronique yves.guiraud@loria.fr
Page personnelle www.loria.fr/~guiraudy

CURRICULUM VITÆ

Parcours professionnel

- Depuis 2007** Chargé de recherche INRIA (Paréo), LORIA, UMR 7503, Nancy.
2006 – 2007 Postdoctorant INRIA (Prothéo), LORIA, Nancy.
2004 – 2006 ATER, Institut de Mathématiques de Luminy (IML), UMR 6206, Marseille.
2000 – 2004 Doctorant, Laboratoire Géométrie, Topologie, Algèbre, UMR 5030, Montpellier, puis Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier (I3M), UMR 5149.

Formation universitaire

- Doctorat** *Présentations d'opérades et systèmes de réécriture*, spécialité mathématiques, Université Montpellier 2, 28 juin 2004. Direction : D. Guin et P. Elbaz-Vincent.
DEA Mathématiques, Université Montpellier 2, mention bien, 2000.
Maîtrise Mathématiques, Université Montpellier 2, mention bien, 1999.

Collaborations

Collaborateurs individuels

- P. Malbos, Institut Camille Jordan, Lyon, depuis sept. 2007 : articles [2] et [1].
- G. Bonfante, LORIA, Nancy, depuis sept. 2006 : articles [4] et [3].
- A. Gouaich et F. Michel, LIRMM, Montpellier, 2000 à 2004 : articles [10] et [9].

Participation à des projets communs

- Projet ANR Blanc *Complice (Complexité implicite)*, depuis janvier 2009. Coordinateur : P. Baillot.
- ARC INRIA *REDO (Redesigning logical syntax)*, depuis janvier 2009. L. Strassburger.
- ARC INRIA *Quotient*, 2007–2008. F. Blanqui.
- Projet ANR Blanc *INVAL (Invariants algébriques des systèmes informatiques)*, 2006–2008. É. Goubault.
- ACI *Géocal (Géométrie du calcul)*, 2004–2006. T. Ehrhard.
- Projet Alliance *Simplicial and cubical sets and knowledge evolution in distributed systems*, 2004. P. Malbos (France) et T. Porter (Royaume-Uni).
- AS *Topologie algébrique pour l'étude des structures de calcul*, 2003. É. Goubault.
- Projet DGA *Méthodes algébriques pour la supervision de systèmes complexes*, 2000–2003. D. Guin (mathématiques) et J. Sallantin (informatique).

Projets communs soumis

- Projet ANR Blanc *nCats (Catégories de dimension supérieure en informatique fondamentale)*, responsable scientifique de partenaire. Coordinateur : F. Métayer.
- ESF Research Networking Program *Applied and computational algebraic topology*. M. Raussen.

Activités collectives

Conseils et commissions

- Groupe de travail développement durable, INRIA Nancy, depuis juin 2009.
- Comité de centre, INRIA Nancy, depuis décembre 2008.
- Commission informatique, LORIA, Nancy, 2007.
- Conseil d'UMR, I3M, Montpellier, 2003–2004.
- Conseil du département de recherche mathématique, Université Montpellier 2, 2000–2004.

Organisation

- Groupe de travail *Invariants algébriques pour l'informatique*, Institut Camille Jordan (ICJ), UMR 5208, Lyon, depuis janvier 2010. Lien : math.univ-lyon1.fr/~guiraud/iai.
- Colloque *PSSL* et journée adjointe du projet ANR *INVAL*, Institut Élie Cartan et LORIA, Nancy, septembre 2007.
- Groupe de travail *Homotopie du calcul*, IML, Marseille, 2004–2006.
- Groupe de travail *Algèbre et programmation fonctionnelle*, I3M, Montpellier, 2002–2004.
- Séminaire *CATIA*, I3M, Montpellier, 2000–2004.

Rapports d'articles

- Journaux : Journal of Automated Reasoning ; Logical Methods in Computer Science.
- Colloques : Typed Lambda Calculi and Applications 2005 ; Termgraph 2006 et 2007 ; Logic for Programming, Artificial Intelligence and Reasoning 2007 ; Rewriting Techniques and Applications 2007 et 2008 ; Opérades 2009.

Conférences et séminaires invités

- Congrès Operads and universal algebra, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, juillet 2010.
- Séminaire d'algèbre, ICJ, Lyon, janvier 2010.
- Séminaire de logique de la programmation, IML, Marseille, avril 2009.
- Congrès Géocal, CIRM, Marseille, février 2006.
- Séminaire d'algèbre et de topologie, IRMA, Strasbourg, novembre 2006.
- Séminaire Prothéo, LORIA, Nancy, avril 2006.
- Séminaire du Laboratoire de Sécurité des Logiciels, CEA, Saclay, mars 2006.
- Séminaire de logique, LAMA, Chambéry, février 2006.
- Séminaire de méthodes homotopiques en informatique, PPS, Paris, février et avril 2005.
- Congrès Proof theory, Technische Universität, Dresde, février 2005.
- Séminaire de logique de la programmation, IML, Marseille, février 2004.

Activités pédagogiques

Encadrement de stages

- S. Martinelle et D. Serra, *Visionneuse de programmes polygraphiques*, École Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine (3e année), Nancy, 2009.
- A. Monot, *Compilateur Tom pour programmes polygraphiques*, École des Mines de Nancy (2e année), 2008.

Enseignement

- Mathématiques discrètes, L2, 126h TD, Univ. Aix-Marseille 2, 2004 et 2005.
- Introduction à l'informatique, L1, 20h TD et 20h TP, Univ. Aix-Marseille 2, 2005.
- Programmation en C, L1, 18h TP, Univ. Aix-Marseille 2, 2005.
- Mathématiques assistées par ordinateur, L1, 12 h TD, Univ. Aix-Marseille 2, 2004 et 2005.
- Théorie des graphes, formation enseignants, 3h cours et 6h TD, IREM Montpellier, 2002.
- Méthodologie mathématique, DEUG 1e année, 30h TD, Univ. Montpellier 2, 2001.
- Colles de mathématiques, mathématiques supérieures, 30h TD, Lycée Daudet, Nîmes, 2000–2001.

PRODUCTION SCIENTIFIQUE

Publications

- [1] Y. Guiraud et P. Malbos, *Identities among relations for higher-dimensional rewriting systems*, Actes de Operads 2009, Séminaires et Congrès, SMF, 16 pages, à paraître.
- [2] Y. Guiraud et P. Malbos, *Higher-dimensional categories with finite derivation type*, Theory and Applications of Categories 22 (18), pages 420–478, 2009.
- [3] G. Bonfante et Y. Guiraud, *Polygraphic programs and polynomial-time functions*, Logical Methods in Computer Science 5 (2/14), pages 1–37, 2009.
- [4] G. Bonfante et Y. Guiraud, *Intensional properties of polygraphs*, Termgraph 2007 (ETAPS), Electronic Notes in Theoretical Computer Science 203 (1), pages 65–77, 2008.
- [5] Y. Guiraud, *The three dimensions of proofs*, Annals of Pure and Applied Logic 141 (1–2), pages 266–295, 2006.
- [6] Y. Guiraud, *Two polygraphic presentations of Petri nets*, Theoretical Computer Science 360 (1–3), pages 124–146, 2006.
- [7] Y. Guiraud, *Termination orders for 3-dimensional rewriting*, Journal of Pure and Applied Algebra 207 (2), pages 341–371, 2006.
- [8] Y. Guiraud, *Termination orders for 3-polygraphs*, Comptes-Rendus de l’Académie des Sciences (Mathématiques), 342 (4), pages 219–222, 2006.
- [9] A. Gouaich, Y. Guiraud et F. Michel, *MIC* : a deployment environment for autonomous agents*, Lecture Notes in Computer Science 3374, 2005.
- [10] A. Gouaich et Y. Guiraud, *MIC* : algebraic agent deployment environment*, Lecture Notes in Computer Science 2871, 2003.

Note

- [11] Y. Guiraud, *Polygraphs for termination of left-linear term rewriting systems*, note, 15 pages, 2007.

Mémoires

- [12] Y. Guiraud, *Présentations d’opérades et systèmes de réécriture*, Thèse de Doctorat, Université Montpellier 2, 2004.
- [13] Y. Guiraud, *Algèbroïdes de Lie et algèbres de Batalin-Vilkovisky*, Mémoire de DEA, Université Montpellier 2, 2000.
- [14] Y. Guiraud, *Il n’y a pas de trou à l’infini dans un monoïde commutatif de type fini*, Mémoire de Maîtrise, Université Montpellier 2, 1999.

Logiciel

- [15] Y. Guiraud, *Catex*, extension et outil externe Latex pour les « diagrammes de cordes », 2009.
Lien : www.loria.fr/~guiraudy/catex.

ACTIVITÉS DE RECHERCHE

Résumé

Les présentations de n -catégories par polygraphes sont un cadre algébrique unificateur pour de nombreuses notions de présentations par générateurs et relations. Les propriétés calculatoires des polygraphes sont étroitement liées à leurs propriétés homotopiques et homologiques. Mon activité consiste à expliciter ces liens afin :

- de construire des invariants homotopiques et homologiques de n -catégories, caractérisant leurs présentations ayant des propriétés calculatoires données ;
- d'utiliser des méthodes algorithmiques issues de la réécriture pour calculer ces invariants et, ainsi, obtenir de nouveaux résultats en théorie du calcul et, notamment, en complexité.

Présentations de n -catégories par polygraphes

Un $(n + 1)$ -polygraphe (ou $(n + 1)$ -computade) est une présentation de n -catégorie, par générateurs (n -cellules) et relations ($(n + 1)$ -cellules) [Bur93, Str76, Str87, Str95, 12]. Les polygraphes unifient différentes notions de présentations par générateurs et relations.

Exemples algébriques. Les présentations de monoïdes, de groupes ou de catégories sont des exemples de 2-polygraphes [Bur93, 12]. Par exemple, considérons le monoïde ayant un élément non trivial, a , et dont le produit est donné par $aa = a$. Vu comme une catégorie, ce monoïde admet, pour présentation, le 2-polygraphe à une 1-cellule, correspondant à a , et une 2-cellule, $aa \Rightarrow a$.

Différentes notions décrivant des structures algébriques abstraites sont des cas particuliers de 2-catégories : les théories algébriques de Lawvere [Law04], les pro(p)s de Mac Lane [ML65] et les opérades [May72] ensemblistes. De plus, pour chacune de ces notions, on connaît une traduction d'une présentation par générateurs et relations sous la forme d'un 3-polygraphe [Bur93, 12]. Par exemple, la 2-catégorie décrivant la structure de monoïde admet une présentation par le 3-polygraphe avec les 2-cellules ∇ pour le produit et \bullet pour l'unité et les 3-cellules correspondant aux relations d'associativité et de neutralité :

$$\begin{array}{ccc} \nabla \nabla \Rightarrow \nabla & \bullet \nabla \Rightarrow | & \nabla \bullet \Rightarrow | \end{array}$$

Quant aux relations de compatibilité d'une bigèbre, elles sont données par les 3-cellules suivantes :

$$\begin{array}{cccc} \text{Hourglass} \Rightarrow \text{Square} & \nabla \bullet \Rightarrow \bullet \bullet & \bullet \nabla \Rightarrow \bullet \bullet & \bullet \bullet \Rightarrow \bullet \bullet \end{array}$$

Exemples topologiques. Les tresses forment une 2-catégorie présentée par le 3-polygraphe à deux 2-cellules, \bowtie et $\overleftarrow{\bowtie}$, et trois 3-cellules :

$$\begin{array}{ccc} \bowtie \Rightarrow || & \overleftarrow{\bowtie} \Rightarrow || & \text{Braid} \Rightarrow \text{Braid} \end{array}$$

Les nœuds et entrelacs, orientés ou non, admettent aussi des présentations par des 3-polygraphes, directement adaptés des mouvements de Reidemeister.

Dans [2], nous considérons un autre exemple de 3-polygraphe présentant une 2-catégorie d'objets topologiques, les « colliers de perles » (cet exemple a été introduit pour montrer que le résultat de Squier sur les présentations finies et convergentes de monoïdes ne se généralise pas en dimension supérieure) :



Polygraphes et réécriture. Un système de réécriture est une présentation par générateurs et relations orientées. On s'intéresse aux propriétés calculatoires des systèmes de réécriture : principalement, la terminaison, garantissant l'arrêt des calculs, et la confluence, certifiant l'unicité des résultats. En particulier, un système de réécriture fini et convergent (terminaison et confluence) fournit un algorithme de décision du problème du mot [New42].

C'est sur ce résultat qu'est fondé le modèle de calcul des langages de programmation fonctionnelle comme Caml et Haskell. Par exemple, le programme Caml suivant extrait d'une liste $[x_1, x_2, x_3, x_4, \dots]$ les sous-listes $[x_1, x_3, \dots]$ et $[x_2, x_4, \dots]$, en donnant une présentation par réécriture de la fonction à calculer :

```
let rec split = fonction
  | [] -> ([], [])
  | x::[] -> (x::[], [])
  | x::y::l -> let (l1,l2)=split(l) in (x::l1,y::l2)
```

Durant la première partie de mon activité de recherche, à Montpellier (Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, I3M, UMR 5149) puis à Marseille (Institut de Mathématiques de Luminy, IML, UMR 6206), j'ai étudié des traductions polygraphiques de différents types de systèmes de réécriture, préservant et reflétant leurs propriétés calculatoires. Dans les premières dimensions, les systèmes de réécriture abstraits (utilisés pour énoncer les propriétés de réécriture) et les systèmes de réécriture de mots (utilisés pour les problèmes de combinatoire dans les monoïdes et les groupes) sont des 1-polygraphes et 2-polygraphes, respectivement [Bur93, 12].

C'est en dimension 3 que l'on trouve la majorité des exemples qui m'intéressent. En effet, les systèmes de réécriture de termes, qui englobent notamment les programmes fonctionnels du premier ordre, possèdent une traduction sous la forme d'un 3-polygraphe [Bur93, Laf03] qui possède des propriétés calculatoires similaires [12, 7]. Dans le cas d'un programme fonctionnel, la traduction est immédiate et le 3-polygraphe obtenu possède exactement les mêmes propriétés [11].

Par exemple, le programme fonctionnel vu précédemment correspond au 3-polygraphe ayant trois 2-cellules, \blacktriangle pour la fonction `split`, \circ pour la liste vide `[]` et ∇ pour le constructeur de listes `::`, et trois 3-cellules :



De plus, le cadre des 3-polygraphes permet de résoudre par réécriture le problème du mot dans certains cas inaccessibles à la réécriture de termes : ceci a été prouvé grâce à l'exemple de la théorie algébrique des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels, contenue dans celle des algèbres de Boole [Laf03, 7]. D'un point de vue informatique, ce résultat est dû au fait que le cadre polygraphique rend explicites les opérations de gestion des pointeurs (duplication et effacement).

Les polygraphes englobent aussi des objets proches des systèmes de réécriture, comme les réseaux de Petri [6], le calcul propositionnel et la logique linéaire [5].

Dérivations, terminaison et complexité

Durant ma thèse, j'ai développé une méthode algébrique permettant de prouver la terminaison de 3-polygraphes, inspirée originellement par des invariants d'entrelacs [12, 8, 7]. Puis, lors de mon séjour postdoctoral à Nancy, j'ai collaboré avec Guillaume Bonfante (LORIA, UMR 7503), pour adapter cette technique en un outil algébrique d'analyse de la complexité des programmes.

Dérivations et terminaison. Un 3-polygraphe Σ engendre une 3-catégorie libre Σ^* , formée, du point de vue de la réécriture, de tous les chemins de calcul engendrés par les 3-cellules de Σ . Ainsi, la terminaison est liée à la finitude des 3-cellules de Σ^* . La méthode mise au point consiste à associer, à chaque 2-cellule, une quantité bornant la longueur des 3-cellules qui en partent et, ainsi, de prouver la terminaison.

De manière très informelle, on attribue, à chaque 2-cellule génératrice, plusieurs applications : certaines décrivent comment des « courants » abstraits se propagent à travers elle ; une autre donne la « chaleur » produite par la traversée de ces courants. On compare les 2-cellules, vues comme des « circuits », à l'aide de la chaleur totale qu'elles produisent, à courants d'entrée égaux. Si, pour chaque 3-cellule $f \Rightarrow g$, la 2-cellule f produit strictement plus de chaleur que g , alors le 3-polygraphe considéré termine.

Plus formellement, comme nous l'avons remarqué ultérieurement avec Philippe Malbos (Institut Camille Jordan, Lyon), les courants forment un *module* sur une 2-catégorie associée au 3-polygraphe considéré, tandis que les chaleurs sont données par une *dérivation* de cette 2-catégorie à valeurs dans ce module [2]. Ces notions, que nous avons formalisées, généralisent celles déjà connues de module et de dérivation sur un monoïde ou un groupe.

Ce résultat est, aujourd'hui, la seule méthode générale connue pour prouver la terminaison des 3-polygraphes. Elle a été utilisée pour prouver plusieurs résultats : la préservation de la terminaison de la traduction polygraphique d'un système de réécriture de termes [12, 7], la terminaison de la présentation de Lafont des $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -espaces vectoriels [Laf03, 12, 7], celle des opérations structurelles en logique [5], de plusieurs programmes fonctionnels [11, 4, 3], ainsi que plusieurs exemples étudiés dans [2], dont la présentation de la 2-catégorie des colliers de perles. Cette méthode a été implantée sous la forme d'un prototype de prouveur automatique de terminaison de programmes fonctionnels du premier ordre [11].

Dérivations et complexité. Étant donné un programme, sa complexité spatiale borne l'espace mémoire nécessaire à son exécution, tandis que sa complexité temporelle majore son temps d'exécution. Avec Guillaume Bonfante, nous avons montré que les dérivations fournissent des outils d'analyse pour la complexité.

Pour cela, nous avons identifié une sous-classe des 3-polygraphes, celle des programmes polygraphiques, qui correspond aux programmes fonctionnels du premier ordre [11] et qui forme un modèle de calcul Turing-complet [3]. De plus, si Σ est un tel programme polygraphique, sa complexité se lit dans les propriétés topologiques de la 3-catégorie Σ^* : en effet, la complexité temporelle est bornée par la taille des 3-cellules de Σ^* et la complexité temporelle est, quant à elle, mesurée par la taille des 2-cellules traversées.

Ainsi, nous avons donné des conditions suffisantes portant sur les modules d'un programme polygraphique donné pour qu'ils fournissent des bornes de sa complexité spatiale. Puis, nous avons obtenu des conditions suffisantes sur les dérivations de ce polygraphe pour qu'elles donnent des bornes de sa complexité temporelle [3].

D'une part, nous avons amélioré les outils existant en réécriture de termes pour l'analyse de complexité des programmes fonctionnels [BCMT01], en permettant une analyse séparée des complexités spatiales et temporelles. D'autre part, nous avons obtenu des caractérisations en termes polygraphiques des classes de complexité P des fonctions calculables en temps polynomial [3] et NP des fonctions dont le résultat est vérifiable en temps polynomial [4].

Conditions de finitude pour la convergence

En collaboration avec Philippe Malbos (Institut Camille Jordan, ICJ, UMR 5208, Lyon), j'ai obtenu de nouveaux invariants homotopiques et homologiques de n -catégories, inspirés des travaux de Squier sur les monoïdes [Squ87, SOK94]. D'une part, nous donnons des méthodes constructives, issues de la réécriture, pour calculer ces invariants. D'autre part, nous obtenons des conditions de finitude nécessaires pour qu'une n -catégorie possède une présentation par un polygraphe fini ayant de bonnes propriétés calculatoires. Ces travaux exhibent les liens forts existant entre la propriété calculatoire de convergence (terminaison et confluence) d'un n -polygraphe Σ et les obstructions topologiques de dimension $n + 1$ entre objets de dimension n dans la n -catégorie libre Σ^* .

Type de dérivation fini. Dans un premier travail [2], nous avons généralisé aux n -catégories présentées par polygraphes la propriété homotopique de *type de dérivation fini* (TDF), introduite par Squier pour les présentations de monoïdes par systèmes de réécriture de mots [SOK94]. Pour cela, nous avons introduit la notion de *track n -catégorie*, ou $(n - 1)$ -catégorie enrichie en groupoïde, généralisant la notion de track 2-catégorie définie par Baues comme modèle algébrique du type d'homotopie en dimension 2 [Bau91].

Un n -polygraphe fini Σ est TDF si la track n -catégorie libre Σ^\top qu'il engendre possède une *base d'homotopie* finie, c'est-à-dire si les obstructions topologiques de dimension $(n + 1)$ entre n -cellules de Σ^\top sont finiment engendrées. Nous avons montré que la propriété TDF est un invariant de la n -catégorie présentée par Σ : il s'agit, en ce sens, d'une propriété de finitude en dimension $n + 2$ des n -catégories, comme le fait d'être finiment engendrée et finiment présentée le sont en dimensions n et $n + 1$, respectivement.

Dans le cas où Σ est convergent, nous avons montré que ses branchements critiques, c'est-à-dire les générateurs de ses défauts potentiels de confluence, engendrent une base d'homotopie de Σ^\top . Avec $n = 2$, on obtient une généralisation du résultat de Squier sur les présentations de monoïdes par systèmes de réécriture de mots : si une catégorie admet une présentation par un 2-polygraphe fini et convergent, alors elle est TDF [SOK94]. Grâce à ce résultat, Squier avait obtenu une nouvelle preuve du fait qu'il existe des monoïdes finiment engendrés et ayant un problème du mot décidable mais qui n'admettent pas de présentation par un 2-polygraphe convergent [Squ87] : ce résultat se transpose immédiatement aux catégories.

Nous avons étudié, plus particulièrement, le cas des 3-polygraphes, fondamentalement différent du précédent. En effet, à partir de $n = 3$, il existe des n -polygraphes finis et convergents ayant une infinité de branchements critiques. Nous avons donné une classification systématique de ces branchements pour le cas des 3-polygraphes. Grâce à celle-ci, nous avons introduit une nouvelle condition de finitude, l'*indexation finie*, qui est vérifiable algorithmiquement pour les 3-polygraphes finis. Nous avons ainsi obtenu le résultat principal de ce travail : si une 2-catégorie admet une présentation par un 3-polygraphe fini, convergent et finiment indexé, alors elle est TDF.

De ce résultat, nous avons déduit une nouvelle formulation, en termes polygraphiques, et une nouvelle preuve, entièrement fondée sur la réécriture, du théorème de cohérence de Mac Lane pour les catégories monoïdales. En pratique, il s'agit de vérifier que le 3-polygraphe présentant la structure de monoïde termine et qu'il est confluent, en calculant ses branchements critiques ; puis de montrer que, parmi les cinq branchements obtenus, seuls deux sont nécessaires pour avoir une base d'homotopie ; enfin, que ces deux branchements correspondent aux diagrammes de cohérence de la structure de catégorie monoïdale, dont l'associaèdre.

Enfin, nous avons montré que la propriété d'indexation finie était nécessaire, à partir de $n = 2$, pour qu'une n -catégorie admettant une présentation finie et convergente soit TDF. Pour cela, nous avons montré que le 3-polygraphe des colliers de perles est fini et convergent, bien que la track 3-catégorie libre qu'il engendre n'admette pas de base d'homotopie finie.

Identités entre les relations. La notion d'*identité entre les relations* provient des travaux de Peiffer et Reidemeister en combinatoire des groupes [Pei49, Rei49]. Elle est basée sur celle de module croisé, introduite par Whitehead [Whi49a, Whi49b]. Puis Baues a introduit les track 2-catégories abéliennes comme généralisations des modules croisés [Bau91].

Avec Philippe Malbos, nous avons introduit la notion d'identité entre les relations pour les n -polygraphes [1]. Cette construction repose sur celle de track n -catégorie [2]. Étant donné un n -polygraphe Σ , on définit le module des *identités entre les relations* de Σ , noté $\Pi(\Sigma)$, à partir de l'abélianisée de la track n -catégorie Σ^\top librement engendrée par Σ . Nous avons montré que le caractère finitaire du module $\Pi(\Sigma)$ est un invariant de la $(n - 1)$ -catégorie présentée par Σ .

On montre, par ailleurs, que ce module est engendré par les éléments d'une base d'homotopie de Σ^\top comme, en particulier, celle qui est donnée par les branchements critiques de Σ lorsque celui-ci est convergent. Nous avons ainsi obtenu une nouvelle condition nécessaire pour qu'une n -catégorie admette une présentation convergente et finie : en effet, dans ce cas, elle est TDF et, par conséquent, elle admet une présentation par un $(n + 1)$ -polygraphe fini Σ tel que le module $\Pi(\Sigma)$ est de type fini.

PROGRAMME DE RECHERCHE

Présentation

Les polygraphes sont des présentations de n -catégories par générateurs et relations [Bur93, Str76, Str87, Str95, 12]. Le point de vue polygraphique unifie plusieurs notions de présentations par générateurs et relations rencontrées en algèbre [Bur93, 12], en topologie [12, 2], en réécriture [12, 7, 6, 11] et en logique [5].

Les relations étroites entre propriétés calculatoires, homotopiques et homologiques des polygraphes ont permis de développer des techniques nouvelles pour la théorie de la complexité [4, 3], la caractérisation des n -catégories admettant des présentations convergentes finies [2, 1], les problèmes de cohérence dans les structures catégorielles [2] et l'étude des structures croisées [1].

Ces travaux ont mis en évidence des classes de n -catégories admettant des présentations par polygraphes ayant de bonnes propriétés calculatoires. Je souhaite poursuivre, dans cette direction, la construction d'invariants homotopiques et homologiques permettant la caractérisation de classes particulières de n -catégories, relativement à des propriétés calculatoires fixées. Parmi celles-ci, deux classes m'intéressent plus particulièrement.

- Une n -catégorie admettant une présentation par un polygraphe fini et convergent possède un problème du mot décidable. Au-delà des conditions connues [2, 1], existe-t-il des invariants homotopiques ou homologiques caractérisant cette classe de n -catégories ? Le cas particulier des théories algébriques de Lawvere m'intéresse pour ses conséquences en théorie de la calculabilité.
- Les n -catégories admettant des dérivations à valeurs dans des modules sur ces n -catégories caractérisent les classes de complexité P et NP. Peut-on définir une théorie cohomologique des n -catégories qui classe leurs dérivations et, ainsi, obtenir une nouvelle approche et de nouveaux outils pour l'étude des classes de complexité ?

Je souhaite étendre cette étude au cadre opéradique en considérant la notion de polygraphe linéaire, une généralisation de la notion de polygraphe adaptée aux présentations de n -catégories enrichies linéairement, englobant les opérades.

Résolutions (non) abéliennes de n -catégories et convergence

Dans cette direction de recherche, je propose d'étudier des conditions homotopiques et homologiques sur les n -catégories, reliées à l'existence de présentations par des polygraphes finis et convergents.

Dans [2], nous avons introduit la notion de base d'homotopie d'une n -catégorie ainsi que la condition homotopique TDF (type de dérivation fini). Cette condition caractérise les n -catégories qui admettent des présentations finies ayant des bases d'homotopie finies. Dans [1], nous avons introduit une notion d'identité entre les relations pour les présentations de n -catégories par polygraphes, basée sur une généralisation des track catégories de Baues [Bau91].

Nous avons montré que, pour les n -catégories admettant des présentations convergentes, les paires critiques (c'est-à-dire les obstructions locales à la confluence) forment une base d'homotopie de la présentation et engendrent le système naturel des identités entre les relations. Par conséquent, si une n -catégorie admet une présentation convergente et finie, elle est TDF et le système naturel des identités entre les relations de cette présentation est de type fini.

Pour les présentations de groupes, Brown et Huebschmann ont établi un isomorphisme entre le module des 2-syzygys homologiques et celui des identités entre les relations [BH82]. Je souhaite explorer ce type de correspondance pour les n -catégories. Ainsi, connaissant les générateurs des identités entre les relations dans le cas convergent, j'espère mieux comprendre les obstructions de nature homologique à l'existence d'une présentation finie et convergente pour une n -catégorie.

Les identités entre les relations formant un système naturel [1], une généralisation de la notion de bimodule, je propose de construire des résolutions abéliennes de systèmes naturels pour des n -catégories admettant des présentations convergentes, généralisant celle de [Squ87]. Dans un travail en cours, avec Philippe Malbos, nous avons obtenu une construction polygraphique d'une telle résolution dans le cas des petites catégories. Grâce à cette résolution, nous avons introduit la condition homologique FP_3 , généralisant celle de [Squ87], et montré que, si une petite catégorie admet une présentation par un polygraphe fini et convergent, alors elle est FP_3 . Je pense que ce travail permettra d'obtenir une généralisation aux n -catégories.

Par ailleurs, je souhaite explorer les relations entre les propriétés homotopique TDF, homologique FP_3 et le caractère finitaire du système naturel des identités entre les relations, par analogie avec la correspondance entre TDF et FP_3 pour les présentations de groupes [CO96]. En effet, je pense qu'il existe des correspondances entre n -syzygys homotopiques, n -syzygys homologiques et identités entre les relations en dimension n , généralisant celles qui sont décrites dans [Lod00] pour les présentations de groupes. Le cadre polygraphique me semble particulièrement adapté pour formuler ces correspondances.

Dans un travail en cours avec Philippe Malbos, nous avons formulé une notion de type de dérivation fini en toute dimension pour les n -catégories, en termes de track n -catégories. Je pense que ce travail aboutira à une notion de résolution non abélienne de n -catégories, généralisant celles des groupes [].

Le cadre des théories algébriques de Lawvere, dont les présentations polygraphiques forment un modèle universel de calcul [3], sont un champ d'application particulièrement intéressant pour les invariants homologique FP_3 et homotopique TDF. L'objectif de cette démarche est d'établir des caractérisations homotopiques et homologiques de la condition de calculabilité d'une fonction, qui s'exprime en termes d'existence d'une présentation finie et convergente de théories algébriques de Lawvere, vues comme des 2-catégories [Bur93, Laf03, 12, 11, 3].

Cohomologie des n -catégories, dérivations et complexité

Les systèmes naturels sur une n -catégorie, que nous avons introduits dans [2], sont des bons candidats pour définir une théorie (co)homologique des n -catégories à coefficients, généralisant la (co)homologie de Baues-Wirsching des petites catégories [BW85]. Je propose de définir cette théorie (co)homologique en termes de foncteurs dérivés, en utilisant les résolutions abéliennes de systèmes naturels précédemment construites. En particulier, dans le cas d'une n -catégorie présentée par un polygraphe fini et convergent, je pense obtenir des résolutions rendant possibles des calculs effectifs.

Une des applications de ce travail serait d'obtenir une nouvelle interprétation de la (co)homologie des théories algébriques de Lawvere. En effet, on connaît déjà des généralisations de la (co)homologie de des petites catégories aux théories algébriques de Lawvere à coefficients dans les modules cartésiens [JP91] et dans les systèmes naturels cartésiens [BJP03]. Je propose ainsi de comparer ces théories à la théorie (co)homologique des n -catégories obtenue dans le cas des théories algébriques de Lawvere, vues comme un cas particulier de 2-catégories en utilisant la présentation équationnelle de [Bur93].

La construction de cette théorie (co)homologique des n -catégories est, en partie, motivée par l'étude des classes de complexité, via la caractérisation que nous avons obtenue en termes de dérivations de n -catégories dans [4, 3], grâce au cadre catégoriel présenté dans [2]. En effet, la cohomologie de Baues-Wirsching des petites catégories classe leurs dérivations à valeurs dans les systèmes naturels. Or, dans [4, 3], les classes de complexité P et NP sont caractérisées par des classes de n -catégories admettant des dérivations à valeurs dans un système naturel fixé, correspondant à la classe de complexité considérée.

Cette direction de recherche fournit une approche inédite et de nouveaux outils, de nature cohomologique, à la théorie de la complexité. Plus précisément, je pense que l'on peut espérer des avancées dans le domaine de la classification des classes de complexité, où de nombreux problèmes restent ouverts. Je propose, en particulier, d'évaluer les outils obtenus sur l'exemple de la 2-catégorie correspondant au problème de satisfiabilité booléenne, dont on sait qu'il est dans la classe NP , et à ses dérivations à valeurs dans le module correspondant à la classe P .

Opérades et polygraphes linéaires

Les présentations de structures algébriques ensemblistes, comme les opérades ensemblistes, les props ou les théories algébriques de Lawvere possèdent des interprétations en termes de polygraphes [Bur93, 12]. Les opérades et les triplets d'opérades [Lod06] peuvent être vus comme des 2-catégories enrichies en espaces vectoriels. Je propose d'étudier la notion de *polygraphe linéaire*, une généralisation des polygraphes décrivant les présentations de n -catégories enrichies, en étendant les résultats de réécriture et les invariants obtenus précédemment.

Plus précisément, je propose d'étudier les généralisations aux polygraphes linéaires des propriétés de réécriture connues pour les polygraphes. Parmi les applications possibles, je pense que les techniques de preuve de convergence de polygraphes linéaires permettront de démontrer des résultats portant sur les opérades, comme la Koszulité ou, encore, les conditions de compatibilité entre structures algébriques et cogébriques intervenant dans les généralisations aux bigèbres des théorèmes de Poincaré-Birkhoff-Witt et Cartier-Milnor-Moore [Lod06].

De plus, le cadre des polygraphes linéaires fournirait un cadre unifié pour étudier la procédure de complétion de Knuth-Bendix pour les systèmes de réécriture, d'une part, et l'algorithme de Buchberger pour le calcul des bases de Gröbner, d'autre part. Une des questions ouvertes est de comprendre pourquoi la première ne termine pas toujours, tandis que la seconde termine sur les algèbres de polynômes symétriques, mais pas sur celles de polynômes non commutatifs. Je pense que ce fait provient des propriétés respectives de réécriture des opérades des algèbres commutatives et des algèbres associatives.

Les invariants homotopiques et homologiques de n -catégories ensemblistes peuvent être étudiés dans le cas linéaire. En particulier, je vise une interprétation, en termes de convergence d'un polygraphe linéaire, de la notion d'identité entre les relations définie en utilisant la structure de module croisé sur une opérade [BMR04].

BIBLIOGRAPHIE

- [Bau91] H.-J. Baues, *Combinatorial homotopy and 4-dimensional complexes*, de Gruyter Expositions in Mathematics, vol. 2, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1991.
- [BCMT01] G. Bonfante, A. Cichon, J.-Y. Marion, and H. Touzet, *Algorithms with polynomial interpretation termination proofs*, Journal of Functional Programming **11** (2001), no. 1, 33–53.
- [BH82] R. Brown and J. Huebschmann, *Identities among relations*, Low-dimensional topology (Bangor, 1979), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 48, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1982, pp. 153–202.
- [BJP03] H.-J. Baues, M. Jibladze, and T. Pirashvili, *Strengthening track theories*, Preprint arXiv :math/0307185, 2003.
- [BMR04] H.-J. Baues, G. Minian, and B. Richter, *Crossed modules over operads and operadic cohomology*, K-Theory **31** (2004), 39–69.
- [Bur93] A. Burrioni, *Higher-dimensional word problems with applications to equational logic*, Theoretical Computer Science **115** (1993), no. 1, 43–62.
- [BW85] H.-J. Baues and G. Wirsching, *Cohomology of small categories*, J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), no. 2-3, 187–211.
- [CO96] R. Cremanns and F. Otto, *For groups the property of having finite derivation type is equivalent to the homological finiteness condition FP_3* , J. Symbolic Comput. **22** (1996), no. 2, 155–177.
- [JP91] M. Jibladze and T. Pirashvili, *Cohomology of algebraic theories*, J. Algebra **137** (1991), no. 2, 253–296.
- [Laf03] Y. Lafont, *Towards an algebraic theory of boolean circuits*, J. Pure and Appl. Algebra **184** (2003), no. 2-3, 257–310.
- [Law04] F. W. Lawvere, *Functorial semantics of algebraic theories*, Reprints in Theory and Applications of Categories **5** (2004), 1–121.
- [Lod00] J.-L. Loday, *Homotopical syzygies*, Une dégustation topologique [Topological morsels] : homotopy theory in the Swiss Alps (Arolla, 1999), Contemp. Math., vol. 265, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000, pp. 99–127. MR MR1803954 (2001k :55022)
- [Lod06] ———, *Generalized bialgebras and triples of operads*, preprint, 2006.
- [May72] J.-P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, vol. 271, Springer-Verlag, 1972.
- [ML65] S. Mac Lane, *Categorical algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society **71** (1965), no. 1, 40–106.
- [New42] M. H. A. Newman, *On theories with a combinatorial definition of "equivalence"*, Annals of Mathematics **43** (1942), no. 2, 223–243.
- [Pei49] R. Peiffer, *Über Identitäten zwischen Relationen*, Math. Ann. **121** (1949), 67–99.
- [Rei49] K. Reidemeister, *Über Identitäten von Relationen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **16** (1949), 114–118.

- [SOK94] C. Squier, F. Otto, and Y. Kobayashi, *A finiteness condition for rewriting systems*, Theoret. Comput. Sci. **131** (1994), no. 2, 271–294.
- [Squ87] C. Squier, *Word problems and a homological finiteness condition for monoids*, J. Pure Appl. Algebra **49** (1987), no. 1-2, 201–217.
- [Str76] R. Street, *Limits indexed by category-valued 2-functors*, J. Pure Appl. Algebra **8** (1976), no. 2, 149–181.
- [Str87] ———, *The algebra of oriented simplexes*, J. Pure Appl. Algebra **49** (1987), no. 3, 283–335.
- [Str95] ———, *Higher categories, strings, cubes and simplex equations*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 1, 29–77.
- [Whi49a] H. Whitehead, *Combinatorial homotopy I*, Bulletin of the American Mathematical Society **55** (1949), no. 3, 213–245.
- [Whi49b] ———, *Combinatorial homotopy II*, Bulletin of the American Mathematical Society **55** (1949), no. 5, 453–496.