ISA– McGill
Proposition pour la constitution d'une équipe associée

dépôt de soumission le 07 juin 2001

Nous proposons un plan de coopération scientifique axé sur le thème "calcul de visibilité" qui combine les connaissances et les expériences de deux équipes de recherche : le groupe Géométrie du projet ISA du LORIA et le laboratoire de géométrie algorithmique de l'université McGill au Canada. Nos groupes ont des liens bien établis que nous souhaitons non seulement conserver mais aussi développer. Nous prévoyons des échanges (visites) de chercheurs, d'étudiants de deuxième et troisième cycles, et de stagiaires post-doctoraux. Nous prévoyons également, sur les trois ans, une série de trois réunions intensives en groupe de travail, d'une semaine chacune, qui vise à regrouper quelques experts internationaux sur nos problèmes de recherche avec les membres de l'équipe associée proposée ici. Nous attendons des résultats sur le plan théorique aussi bien que sur le plan pratique, dans un premier temps sous forme d'articles dans des proceedings et revues scientifiques de qualité, et à plus long terme sous forme de développement logiciel.

Membres de l'équipe

L'équipe est constituée d'un sous-groupe du projet ISA [1] de l'INRIA Lorraine - LORIA et d'un sous-groupe du laboratoire de géométrie algorithmique [2] de l'École d'informatique de l'université McGill, Montréal, Canada.

- Membres participants du projet ISA, INRIA Lorraine - LORIA
  - Hazel Everett, professeur univ. Nancy 2
  - Sylvain Lazard, CR2 INRIA
  - Sylvain Petitjean, CR1 CNRS
  - Hyeon-Suk Na, Postdoc INRIA
- Membres participants du laboratoire de géométrie algorithmique de l'université McGill
  - Sue Whitesides, professeur
  - Godfried Toussaint, professeur
  - Luc Devroye, professeur [3]
  - Doctorants : Vida Dujmović, Steve Robbins
  - Étudiant de Master : Matthew Kitching, Malvika Rao

Historique de la collaboration

Mme Hazel Everett et M. Sylvain Lazard sont bien connus dans le laboratoire de géométrie algorithmique à McGill car chacun d'eux a fait deux années d'études post-doctorales dans ce laboratoire : Mme Everett en 1991-93, et M. Lazard en 1997-99. Mme Whitesides a passé une année sabbatique à l'INRIA Sophia-Antipolis, dans le projet PRISME, en 1994-95. À cette occasion, elle a fait la connaissance de M. Lazard, et une collaboration sur les aspects géométriques de planification de mouvements de robots a démarré [AB98].

Lors du stage post-doctoral de M. Lazard à McGill, Mme Whitesides, M. Toussaint et un troisième collègue à McGill ont formé une équipe québécoise qui, avec une partie du projet PRISME de l'INRIA Sophia-Antipolis, a obtenu un soutien financier des gouvernements français et québécois pour des échanges scientifiques entre la France et le Québec. Ce financement a permis à M. Robbins, notamment, de faire une visite d'un mois à Sophia-Antipolis. Malheureusement, ce programme n'existe plus dans nos domaines (informatique, sciences de l'ingénieur), et s'applique désormais à d'autres domaines tels que la biologie.

Outre ses visites à Sophia-Antipolis, Mme Whitesides a rendu une brève visite au LORIA en 1999 et une visite d'un mois en 2001. M. Lazard a rendu une brève visite à McGill en 2000.

1. Vision artificielle et informatique graphique, responsable Jean-Claude Paul.
2. Responsable Sue Whitesides.
3. Luc Devroye, expert sur les applications de probabilité en géométrie, fait partie du projet en tant que consultant scientifique.

Depuis longtemps, M. Toussaint et Mme Whitesides organisent des semaines séminaires de recherche au Bellairs Research Institute de l'université McGill. Leur série de "workshops" est connue dans la communauté de géométrie algorithmique par leur caractère à la fois informel et productif. Ces workshops ont mis sur pied plusieurs projets de collaboration internationale avec succès. En effet, ces workshops ont servi à créer un réseau international de chercheurs qui se connaissent bien car ils ont travaillé ensemble à Bellairs. Mme Everett et M. Lazard ont participé à plusieurs de ces workshops, pendant et après leurs études à McGill. Ces workshops leur ont déjà donné l'occasion de connaître et de travailler avec Mme Dujmović et M. Robbins. Quelques réalisations conjointes de ces workshops incluent [AB98, BD98, EL98, BD99a]. D'autres travaux conjoints ont également été publiés : [ES98, BD99b, DL00, DW01], et [EW91].

[AB98] P. Agarwal, T. Biedl, **S. Lazard**, **S. Robbins**, S. Suri, et **S. Whitesides**, "Curvature-Constrained Shortest Paths in a Convex Polygon", Proc. of the ACM Fourteenth Annual Symposium on Computational Geometry, Minneapolis, Minnesota, USA, juin 7-10, 1998, pages 392-401. Soumis à *SIAM J. on Computing*.

[BD98] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, **S. Lazard**, A. Lubiw, J. O'Rourke, **S. Robbins**, I. Streinu, **G. Toussaint**, et **S. Whitesides**, "On Reconfiguring Tree Linkages: Trees Can Lock", Proc. of the Tenth Canadian Conference on Computational Geometry CCCG '98, U. McGill, Montréal, Canada, 10-12 août, 1998, pages 4-5. Accepté dans *Discrete Applied Mathematics*, février 2001, sous le titre "A Note on Reconfiguring Tree Linkages: Trees can Lock".

[BD99a] T. Biedl, E. Demaine, M. Demaine, **S. Lazard**, A. Lubiw, J. O'Rourke, M. Overmars, **S. Robbins**, I. Streinu, **G. Toussaint**, et **S. Whitesides**, "Locked and Unlocked Polygonal Chains in 3D", Proc. of the Tenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), Baltimore MD, USA, jan. 1999, pages 866-867. Accepté dans *Discrete and Computational Geometry*, mai 2001.

[BD99b] T.Biedl, E. Demaine, **S. Lazard**, **S. Robbins** et M. Soss, "Convexifying Monotone Polygons", Proc. of the 10th Annual International Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC'99), Lecture Notes in Computer Science, Chennai, India, December 16-18, 1999, pp. 415-424.

[DL00] Congrès sciences de l'ingénieur, ACFAS, Montréal, mai 18, 2000. David Daney, **Sylvain Lazard**, and **Sue Whitesides**, "Géométrie algorithmique pour la CAO".

[DW01] **Vida Dujmović** and **Sue Whitesides**, "On Validating Planar Worlds", Proc. of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA), Washington DC, USA, jan. 2001, pages.

[EL98] **H. Everett**, **S. Lazard**, **S. Robbins**, H. Schrœder et **S. Whitesides**, "Convexifying Star-shaped Polygons", Proc. of the Tenth Canadian Conference on Computational Geometry CCCG '98, U. McGill, Montréal, Canada, 10-12 août, 1998, pages 2-3.

[ES98] **H. Everett**, I. Stojmenovic, **S. Whitesides**, et P. Valtr, "The Largest k-Ball in a d-Dimensional Box", *Computational Geometry, Theory and Applications*, vol. 11, pages 59-67, 1998.

[EW91] **H. Everett** et **S. Whitesides**, "Finding all the Largest Circles in a 3-Dimensional Box", Proc. of the Third Canadian Conference on Computational Geometry, Vancouver, British Columbia, Canada, 6-10 août, 1991, pages 84-87.

Projet scientifique

Contexte

Du point de vue de l'équipe ISA, le projet scientifique proposé dans cette demande d'équipe associée fait directement suite à l'ARC *Visibilité tridimensionnelle : théorie et applications* (2000/2001) que nous gérons. Dans le cadre de cette ARC, nous avons attaqué quelques problèmes et compris et soulevé de nombreux autres. Actuellement, dans le projet ISA, nous travaillons en particulier sur les aspects de robustesse pour le calcul du complexe de visibilité, structure de donnée globale permettant de répondre à des requêtes de visibilité. Nous souhaitons continuer à travailler sur le sujet tout en conservant et développant nos relations de collaboration avec l'université McGill. Ceci est possible car les membres du laboratoire de géométrie algorithmique à McGill sont intéressés par ces problèmes de visibilité qui sont dans l'air du temps et scientifiquement intéressants et difficiles.

Nous développons ci-dessous notre projet scientifique en suivant la présentation qui en avait été faite dans la demande concernant l'ARC *Visibilité tridimensionnelle : théorie et applications*. En effet, tous les grands problèmes que nous y soulevions sont toujours ouverts.

Généralités

Dans plusieurs domaines de l'informatique, la notion de visibilité joue un rôle fondamental. C'est le cas notamment en infographie, en chimie algorithmique (manipulation de configurations moléculaires), en robotique (pour la planification de trajectoires de robots mobiles), en informatique temps réel (pré-calculs de la visibilité et des occultations pour un affichage rapide, par exemple dans les jeux vidéo ou les simulateurs) et en vision artificielle (reconstruction d'objets). Le domaine d'application qui nous intéresse tout particulièrement est l'infographie. Dans ce domaine, le calcul des objets visibles depuis un point donné, les calculs d'ombre ou de pénombre sont des exemples de calculs de visibilité. Dans les algorithmes de radiosité, qui permettent d'effectuer des simulations lumineuses réalistes pour des environnements complexes, il est nécessaire de déterminer si deux points de la scène sont mutuellement visibles. Les calculs de visibilité peuvent être excessivement coûteux. Ainsi, en radiosité, entre 50 et 70 % de la simulation sont généralement passés à effectuer des requêtes de visibilité. En lancer de rayons, le taux est encore plus important.

Les requêtes de ce type sont d'une nature intrinsèquement globale, au sens où des objets spatialement éloignés peuvent avoir des interactions très complexes et peu intuitives. C'est ce qui explique que, jusqu'à récemment, les chercheurs, pour résoudre les problèmes de visibilité auxquels ils ont été confrontés, ont développé des structures *ad hoc* permettant de répondre à des requêtes précises mais d'une portée limitée. Ces solutions, bien qu'en général satisfaisantes, manquent d'un cadre de travail approprié, mathématiquement bien défini et qui exploite les propriétés de la visibilité 3D.

Récemment, des travaux dans la communauté de géométrie algorithmique se sont attachés à comprendre la cohérence inhérente aux espaces de droites et de rayons lumineux qui sont au cœur des questions de visibilité. Ainsi, en deux dimensions, Pocchiola et Vegter [15] ont introduit le complexe de visibilité, une structure globale à partir de laquelle il est possible d'effectuer une grande variété de requêtes de visibilité différentes, et ceci avec une base mathématique solide. Durand *et al.* [4, 6] se sont ensuite intéressés à plusieurs extensions du complexe de visibilité en trois dimensions, en appliquant les structures développées à un contexte de radiosité. En 2D, Cho et Forsyth [1] ont utilisé le même complexe pour une illumination par lancer de rayons, exploitant ainsi la cohérence entre rayons voisins qui heurtent les mêmes objets.

Le complexe de visibilité, et autres structures connexes, est également intimement lié à une représentation développée dans le domaine de la vision artificielle : le graphe d'aspect [13, 16]. Cette représentation énumère l'ensemble des "vues" topologiquement distinctes d'un objet. Par ailleurs, le complexe de visibilité et le graphe d'aspect ont d'importants points communs avec une représentation issue de la reconstruction par intersection de volumes : l'enveloppe visuelle [8, 14].

En résumé, les problèmes actuels sur la visibilité 3D sont motivés par de nombreuses applications. La compréhension théorique de ces problèmes n'en est, quant à elle, qu'à ses balbutiements, ce qui se traduit par des solutions pratiques peu efficaces et difficilement utilisables dans des applications de taille réelle.

Visibilité 3D : aspects théoriques

Les aspects théoriques de la visibilité 3D ont été peu étudiés jusqu'à présent. C'est un domaine dont les fondements théoriques et mathématiques restent encore largement à établir. C'est en particulier vrai pour la construction de structures de visibilité globales, comme le complexe de visibilité. Les travaux de Durand *et al.* [4, 6] ont amené un premier ensemble de réponses pour des primitives polygonales simples, mais même dans ce cas, il reste beaucoup à faire. Le meilleur algorithme connu de construction du complexe de visibilité, sensible à la sortie, a été décrit dans [5]. Peut-on améliorer sa complexité ? L'approche utilisée est-elle optimale ? Se transpose-t-elle dans le cas d'autres primitives, par exemple des primitives courbes algébriques de faible degré ?

Les calculs de visibilité dans un espace à trois dimensions peuvent être pensés en termes de droites plutôt qu'en termes de points. Les faces du complexe de visibilité correspondent à des droites ayant des contacts particuliers avec les objets considérés (contacts en 2, 3 voire 4 points). Les applications qui nous intéressent ici (radiosité, problèmes liés aux contours occultants d'un objet courbe en vision, . . .) peuvent également être formulées simplement en termes de droites. Ainsi, en radiosité, le facteur de forme entre deux objets, dans le cas de fonctions de base constantes, est la densité (au sens de la géométrie intégrale) des droites coupant les deux objets [11]. Dans la pratique, cependant, ces problèmes sont généralement abordés en termes de points. Cela tient essentiellement à la structure plus compliquée des ensembles de droites, qui ont été moins étudiés.

Une meilleure compréhension des espaces de droites est sans doute un point-clé du développement de structures de visibilité 3D efficaces. Il existe quelques travaux sur ces questions (citons notamment [12, 3]), mais qui laissent de nombreuses pistes de recherche ouvertes. Il n'y a pas, par exemple, de consensus sur les paramétrages des droites à adopter. Le paramétrage "standard" utilise les coordonnées de Plücker (représentant une droite de $\mathbb{R}^3$ par un point sur une surface de degré deux de $\mathbb{R}^5$). Mais on peut également représenter une droite de $\mathbb{R}^3$ par un point de $\mathbb{R}^4$. Et il existe encore d'autres paramétrages, moins connus et moins utilisés. Bien qu'étant mathématiquement équivalents, ces paramétrages n'ont pas nécessairement les mêmes propriétés algorithmiques, numériques ou probabilistes. Quels sont les avantages des uns par rapport aux autres ? Dans quels contextes s'appliquent-ils ? Est-il possible de dégager une représentation unifié des différents paramétrages ?

Visibilité et objets courbes

Depuis plusieurs années, le projet ISA (INRIA Lorraine) collabore avec une société canadienne, SGDL (pour Solid Geometry Design Logic), qui développe un noyau de modélisation volumique aux concepts très novateurs [17]. En particulier, ce modeleur a pour particularité d'utiliser comme primitive de base des surfaces algébriques de faible degré et plus spécifiquement les quadriques et les quartiques (degré 4). Les quadriques ont un bon pouvoir descriptif et une faible complexité qui en font une alternative intéressante aux primitives traditionnellement utilisées en CAO. On estime par exemple que 85 % des pièces mécaniques peuvent être bien décrites par des carreaux de quadriques naturelles (plans, cônes, sphères et cylindres) [10].

Pour SGDL, disposer d'un outil de visualisation efficace de scènes composées d'un grand nombre de quadriques serait un atout considérable. Il permettrait de valider un certain nombre de choix faits par la société dans le développement de son produit. L'outil de visualisation employé actuellement utilise des calculs de requêtes de visibilité de type lancer de rayons. Développer des algorithmes efficaces de lancer de rayons sur des objets courbes s'avère donc d'un intérêt pratique important.

Cet axe de recherche s'appuie sur quelques travaux déjà existants, portant notamment sur les sphères. Dans le cadre de la manipulation de configurations moléculaires, Halperin et Overmars [7] ont ainsi montré comment construire efficacement la carte de visibilité d'un ensemble de sphères. Pour leur part, Mohaban et Sharir [9] se sont intéressés au problème du lancer de rayons. Ils ont ainsi étudié des algorithmes de lancer de rayons en ligne pour un ensemble de sphères. Curieusement, les complexités rapportées sont les mêmes pour les sphères que pour des plans, ce qui peut paraître surprenant et est en tout cas un résultat à creuser.

La construction de structures de visibilité globales (type complexe de visibilité) pour des scènes quadriques est également d'un intérêt considérable en radiosité. Jusqu'à aujourd'hui, la prise en compte de primitives courbes en radiosité passait par une discrétisation de la géométrie ou par d'autres types d'approximations permettant de ramener le problème au cas classique des facettes polygonales. Toutefois, des solutions se profilent autorisant l'illumination d'objets courbes sans ces approximations, ce qui a le double avantage d'augmenter le réalisme de la simulation et d'illuminer des scènes d'une plus grande complexité géométrique. Pour que ces solutions soient réellement utilisables en pratique, il convient de développer parallèlement des algorithmes de calcul de visibilité 3D globale sur des objets courbes.

Visibilité 3D : aspects pratiques

La robustesse des techniques de visibilité est un point fondamental pour leur utilisation dans un contexte applicatif. Les difficultés d'ordre algorithmique liées à l'utilisation de structures de visibilité globale et à leur implantation font donc également partie des préoccupations des membres du projet. Comme cela est fréquemment le cas en géométrie, la prise en compte des cas dégénérés dans les calculs de visibilité est bien plus fastidieuse que le traitement du cas général. Or si les travaux théoriques se sont souvent intéressés à des configurations "génériques", les scènes rencontrées en pratique, notamment en infographie, présentent de nombreuses dégénérescences. Ces cas particuliers n'influent que localement sur la structure de visibilité utilisée mais sont un fardeau pour la robustesse du logiciel. Ainsi que l'a bien montré Durand [4], le traitement cohérent des dégénérescences est un problème difficile.

En matière de visibilité 3D, l'autre goulot d'étranglement concerne le passage à l'échelle. En effet, l'implantation du complexe de visibilité 3D réalisée par F. Durand n'est en mesure que de traiter des scènes de petite taille par rapport au standard des scènes rencontrées en synthèse d'images. Le point noir est l'occupation mémoire des structures calculées. Les solutions proposées pour remédier à ce problème sont variées et représentent un champ important d'investigation future : développement d'algorithmes de construction "paresseuse", utilisation d'approches multi-échelles, définition de modèles de scènes "réalistes" (et calculs de complexité relatifs à ces modèles), etc. Plus généralement, puisque la visibilité exacte peut être difficile à calculer, il est important de se pencher sur des requêtes approchées (cf. [2]) et de définir un cadre mathématique approprié à ce type de requêtes.

Programme de travail et budget

Nous prévoyons un programme d'échange de plusieurs visites par les membres des deux équipes. Le programme d'échange est résumé dans le tableau ci-dessous. Il est très précis concernant les dates des différentes visites et rencontres ; en effet, nous avons profité de la rédaction de ce dossier pour définir précisément ces dates, ceci pour nous permettre de réserver les périodes en question.

Nous avons élaboré ce programme (en accord avec les différents participants) à l'occasion de la visite de Mme Whitesides au LORIA en juin 2001. Nous avons également commencé à définir précisément les programmes de travail des différents échanges prévus en 2001 et début 2002 (voir ci-dessous).

Les échanges dépendent, bien évidemment, du développement de nos idées et des exigences des études des étudiants, en particulier des post-doctorants. Le personnel étudiant est donc susceptible de changer au fil du projet. Néanmoins, nous avons identifié un groupe d'étudiants qui sont intéressés par le projet tant au niveau scientifique que par le programme d'échange.

Nous prévoyons également une série de trois workshops au Bellairs Research Institute de l'université McGill. Bellairs est une station de recherche sur la biologie marine à la Barbade qui prête ses locaux aux membres de l'université McGill pour organiser des groupes de travail (workshop) d'une quinzaine de personnes. L'endroit, agréable, favorise la participation de chercheurs de renommée internationale. Nous travaillons actuellement à préciser le sujet, les dates, et les participants invités pour le workshop de 2002. Le sujet dans sa généralité portera sur l'application de méthodes de géométrie algorithmique aux problèmes de visibilité en graphisme ; nous pensons à inviter des chercheurs tels que Dan Halperin de Tel Aviv, déjà impliqué avec le logiciel CGAL de l'INRIA, Marc de Berg et Mark Overmars de l'université Utrecht, Leo Guibas de Stanford.

Visites McGill ⟶ LORIA & Bellair Institute			Visites LORIA ⟶ McGill & Bellair Institute			
V. Dujmović	1 mois	septembre 2001	H.-S. Na	1 mois	octobre 2001	20KF
V. Dujmović, M. Kitching, S. Whitesides, 3 invités	1 semaine (workshop)	février 2002	H. Everett, S. Lazard, H.-S. Na, S. Petitjean, 2 invités	1 semaine (workshop)	février 2002	50KF
M. Kitching	4 mois	janvier-avril 2002	H.-S. Na	2 semaines	printemps 2002	16KF
S. Whitesides	1 mois	juin 2002	H. Everett	3 semaines	août-sept. 2002	20KF
V. Dujmović	1 mois	juin 2002	S. Lazard	3 semaines	août-sept. 2002	20KF
V. Dujmović, M. Kitching, S. Whitesides, 3 invités	1 semaine (workshop)	février 2003	H. Everett, S. Lazard, H.-S. Na, S. Petitjean, 2 invités	1 semaine (workshop)	février 2003	50KF
S. Robbins	1 mois	janvier 2003				
S. Whitesides	1 mois	mai-juin 2003				
V. Dujmović	1 mois	mai-juin 2003	H. Everett	2 semaines	septembre 2003	16KF
H.-S. Na[4]	1 mois	mai -juin2003	S. Lazard	2 semaines	septembre 2003	16KF
V. Dujmović, M. Kitching, H.-S. Na, S. Whitesides, 2 invités	1 semaine (workshop)	février 2004	H. Everett, S. Lazard, S. Petitjean, 3 invités	1 semaine (workshop)	février 2004	50KF
S. Whitesides	1 mois	mai-juin 2004	H. Everett	2 semaines	septembre 2004	16KF
V. Dujmović	1 mois	mai-juin 2004	S. Lazard	2 semaines	septembre 2004	16KF
postdoc	1 mois	printemps 2004				

Budget

Total visites McGill ⟶ LORIA : 14 homme-mois sur trois ans.
Total visites LORIA ⟶ McGill & Bellair Institute : 290KF sur trois ans.

4. Sous l'hypothèse que H.-S. Na effectura un postdoc à McGill après la fin de son postdoc au LORIA.

Programme de travail des échanges pour 2001 et début 2002

Mlle Vida Dujmović commence sa thèse de doctorat sur les aspects géométriques des problèmes de visibilité en dimension 3, en utilisant des méthodes de décomposition algébrique et d'analyse probabiliste de structures de donnés. V. Dujmović étudiera, en préparant sa visite chez ISA à l'automne 2001, la littérature concernant la décomposition hiérarchique de volumes, l'analyse de structures de donnés pour des objets tridimensionnels, et les réalisations de l'équipe ISA.

Mlle Malvika Rao, qui compte également écrire sa thèse de maîtrise sur les méthodes de décomposition hiérarchique des volumes, s'intéresse à faire un stage chez ISA à l'automne 2001 (projet non budgétisé car encore hypothétique).

Mlle Hyeon Suk Na, post-doctorante chez ISA, ira à McGill (après le retour de Vida Dujmović) pour une visite de deux à quatre semaines, pour discuter des aspects probabilistes concernant la taille des complexes de visibilité avec M. Devroye et pour lui donner l'occasion de connaître l'équipe de McGill en vue d'un postdoc à McGill.

M. Matthew Kitching fera un stage de 4 mois chez ISA début 2002 pour travailler sur une implémentation robuste du squelette de visibilité en 3D. Nous espérons que ces travaux d'implantation se ferons dans la continuité des travaux que va effectuer M. Anoop Pant, stagiaire indien (ITT Kanpur) chez ISA de début juin à fin août 2001.

Cadre juridique

L'université McGill est une institution dont les orientations sont très internationale. Les collaborations internationales sont très appréciées, encouragées, et donc bien soutenues par des structures administratives appropriées. McGill accueille nombre d'étudiants et de chercheurs français chaque année et à tous les niveaux. Aucun problème n'est donc à redouter concernant les échanges de visites de chercheurs et d'étudiants que nous proposons.

Le directeur de l'institut Bellairs est dès à présent d'accord pour accueillir la série de workshops prévus. Il s'avère que l'institut cherche en ce moment à élargir ses activités de ce genre.

Références

[1] F. Cho and D. Forsyth. Interactive ray tracing with the visibility complex. *Computers and Graphics*, 1999. To appear in a special issue on Visibility - Techniques and Applications.

[2] Y. Chrysanthou, D. Cohen-Or, and D. Lischinski. Fast approximate quantitative visibility for complex scenes. In *Proc. of Computer Graphics International*, pages 220–229, 1998.

[3] M. de Berg, H. Everett, and L. Guibas. The union of moving polygonal pseudodiscs – combinatorial bounds and applications. *Computational Geometry: Theory and Applications*, 11:69–82, 1998.

[4] F. Durand. *Visibilité tridimensionnelle : étude analytique et applications*. PhD thesis, Université Joseph Fourier - Grenoble I, 1999.

[5] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The 3D visibility complex: a unified data-structure for global visibility of scenes of polygons and smooth objects. In *Proceedings of 9th* CCCG *(Canadian Conference on Computational Geometry), Kingston, Canada*, pages 153–158, 1997.

[6] F. Durand, G. Drettakis, and C. Puech. The visibility skeleton: a powerful and efficient multi-purpose global visibility tool. *Computer Graphics Proceedings, Annual Conference Series*, 31:89–100, 1997. Proceedings of SIGGRAPH'97.

[7] D. Halperin and M. H. Overmars. Spheres, molecules, and hidden surface removal. In *Proc. 10th Annu. ACM Sympos. Comput. Geom.*, pages 113–122, 1994.

[8] A. Laurentini. The visual hull concept for silhouette-based image understanding. IEEE *Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 16(2):150–162, February 1994.

[9] S. Mohaban and Micha Sharir. Ray shooting amidst spheres in three dimensions and related problems. *SIAM J. Comput.*, 26:654–674, 1997.

[10] B. Nourse, D. Hakala, R. Hillyard, and P. Malraison. Natural quadrics in mechanical design. *Autofact West*, 1:363–378, 1980.

[11] M. Pellegrini. Monte Carlo approximation of form factors with error bounded *a priori*. In *Proceedings of 11th* SCG *(*ACM *Annual Symposium on Computational Geometry), Vancouver, Canada*, pages 287–296, 1995.

[12] M. Pellegrini. Ray shooting and lines in space. In Jacob E. Goodman and Joseph O'Rourke, editors, *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, chapter 32, pages 599–614. CRC Press LLC, Boca Raton, FL, 1997.

[13] S. Petitjean. The enumerative geometry of projective algebraic surfaces and the complexity of aspect graphs. *International Journal of Computer Vision*, 19(3):1–27, 1996.

[14] S. Petitjean. A computational geometric approach to visual hulls. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 8(4):407–436, 1998. Special issue on applied computational geometry, edited by Ming Lin and Dinesh Manocha.

[15] M. Pocchiola and G. Vegter. The visibility complex. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 6(3):1–30, 1996. Proceedings of 9th SCG (ACM Annual Symposium on Computational Geometry).

[16] J.H. Rieger. On the complexity and computation of view graphs of piecewise-smooth algebraic surfaces. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A*, 354(1714):1899–1940, 1996.

[17] J.-F. Rotgé. *L'arithmétique des formes : une introduction à la logique de l'espace*. PhD thesis, Faculté de l'Aménagement, université de Montréal, 1997.