

Droites Discrètes, Reconnaissance et Applications

École Jeunes Chercheurs Informatique Mathématique

Nancy, le 23 mars 2007

Isabelle DEBLED-RENNESON

Équipe ADAGIO

LORIA

Technopole de Nancy-Brabois
615 rue du Jardin Botanique, BP101
F-54600 Villers-les-Nancy

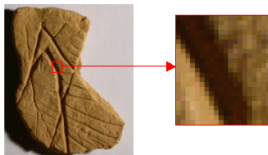
Plan

- 1** Géométrie Discrète
 - Motivations
 - Notions de base
- 2** Droites discrètes
 - Premières définitions
 - Définition arithmétique
 - Reconnaissance
 - Applications
- 3** Segments flous
 - Motivations
 - Définition
 - Reconnaissance
 - Applications
- 4** Bibliographie

Plan

- 1 Géométrie Discrète**
 - Motivations
 - Notions de base
- 2 Droites discrètes**
 - Premières définitions
 - Définition arithmétique
 - Reconnaissance
 - Applications
- 3 Segments flous**
 - Motivations
 - Définition
 - Reconnaissance
 - Applications
- 4 Bibliographie**

Motivations



Appareils photos numériques

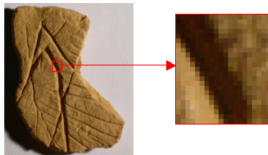
Scanners

IRM médicaux

...

⇒ Données discrètes

Motivations



Appareils photos numériques

Scanners

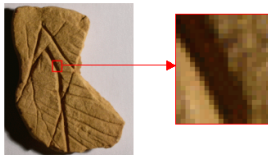
IRM médicaux

...

⇒ Données discrètes

Interprétation et traitement des données :

Motivations



Appareils photos numériques

Scanners

IRM médicaux

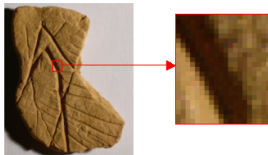
...

⇒ Données discrètes

Interprétation et traitement des données :

- Plongement des données dans un espace continu
 - Utilisation de méthodes d'approximation puis de méthodes paramétriques

Motivations



Appareils photos numériques

Scanners

IRM médicaux

...

⇒ Données discrètes

Interprétation et traitement des données :

- Plongement des données dans un espace continu
 - Utilisation de méthodes d'approximation puis de méthodes paramétriques
- Définition des objets discrets sous-jacents au problème
 - Utilisation des propriétés de ces objets

Géométrie
Discrète

Motivations

Notions de
base

Droites
discrètes

Premières
définitions

Définition
arithmétique

Reconnaissance
Applications

Segments flous

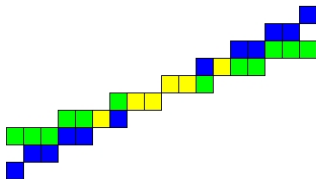
Motivations

Définition

Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Motivations



Données discrètes



Théorèmes de la géométrie euclidienne
non satisfaits



Géométrie Discrète

Historique

Années 70 : **A. Rosenfeld, G. Herman, E. Khalimsky**

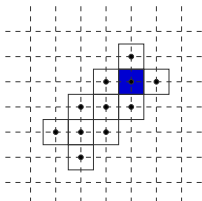
Objectif : définir un cadre théorique pour transposer dans \mathbb{Z}^n les bases de la géométrie euclidienne

Géométrie Discrète

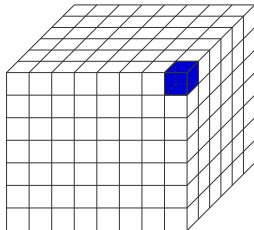
- Grille (représentation des données)
- Topologie
- Objets de base (points, droites, plans, ...)
- Algorithmique adaptée

Grilles régulières

Espace discret 2D



Espace discret 3D



Connexités



4-connecté

A et B de \mathbb{Z}^2 sont 4-voisins
(ou 4-adjacents) si :

$$|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 1$$



8-connecté

A et B de \mathbb{Z}^2 sont 8-voisins
(ou 8-adjacents) si :

$$\max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) = 1$$

Connexités



4-connecté

A et B de \mathbb{Z}^2 sont 4-voisins
(ou 4-adjacents) si :

$$|x_A - x_B| + |y_A - y_B| = 1$$



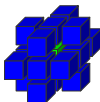
8-connecté

A et B de \mathbb{Z}^2 sont 8-voisins
(ou 8-adjacents) si :

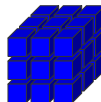
$$\max(|x_A - x_B|, |y_A - y_B|) = 1$$



6-connecté



18-connecté



26-connecté

α -connecté ou α -adjacence

Courbes

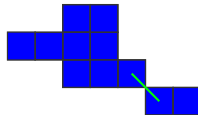
k -Chemin

Soit une séquence $\mathcal{E} = \{p_i\}_{i=0..n}$ de points discrets et une relation de k -adjacence, \mathcal{E} est un **k -chemin** si pour tous les éléments p_i de \mathcal{E} , p_i est k -voisin de p_{i-1} .



k -Objet

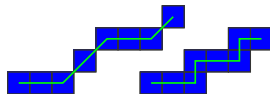
Soit un ensemble \mathcal{E} de points discrets et une relation de k -adjacence, \mathcal{E} est un **k -objet** si pour tout couple de points p et q de \mathcal{E} , il existe un k -chemin dans \mathcal{E} .



Courbes

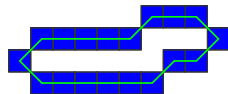
k -Arc

Soit un ensemble $\mathcal{E} = \{p_i\}_{i=0..n}$ de points discrets et une relation de k -adjacence, \mathcal{E} est un k -arc si pour tous les éléments p_i de \mathcal{E} , p_i a exactement deux points k -voisin dans \mathcal{E} , sauf p_0 et p_n appelés extrémités de l'arc.



k -Courbe

Soit un ensemble \mathcal{E} de points discrets et une relation de k -adjacence, \mathcal{E} est une k -courbe si \mathcal{E} est un k -arc et $p_0 = p_n$.



Géométrie
Discrète

 Motivations
Notions de
base

 Droites
discrètes

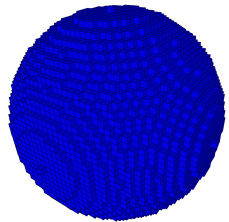
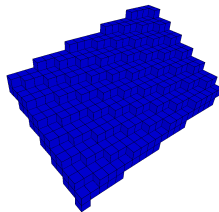
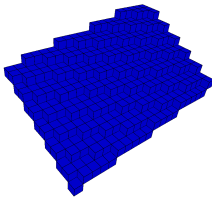
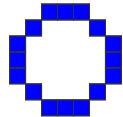
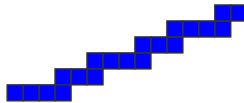
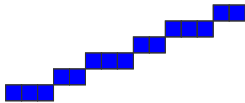
 Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments flous

 Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Objets discrets de base

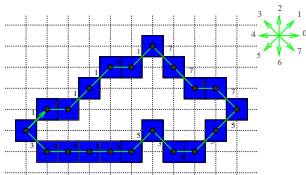


Plan

- 1 Géométrie Discrète
 - Motivations
 - Notions de base
- 2 Droites discrètes
 - Premières définitions
 - Définition arithmétique
 - Reconnaissance
 - Applications
- 3 Segments flous
 - Motivations
 - Définition
 - Reconnaissance
 - Applications
- 4 Bibliographie

Historique des premières définitions

Caractérisation de Freeman (74) et codage d'une courbe discrète



$$P_0 = (0,2), C = \{1,0,1,1,0,1,7,7,0,7,5,5,4,3,5,4,4,4,4,3\}$$

Si un 8-arc est un **segment de droite discrète**, alors son code vérifie les trois propriétés suivantes :

- 1 Le code contient au plus deux valeurs différentes, celles-ci diffèrent au plus d'une unité (modulo 8) ;
- 2 Une des deux valeurs apparaît toujours de manière isolée ;
- 3 Cet élément isolé est réparti uniformément dans le code.

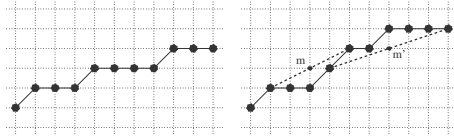


H. FREEMAN,

Computer Processing of Line-Drawing Images.
ACM Computing Surveys, 6(1):57-97, 1974.

Historique des premières définitions

Propriété de la corde de Rosenfeld (74)



Propriété de la corde

Un ensemble de pixels X vérifie la **propriété de la corde** si pour tout couple de points P et Q de X et pour tout point $m(x,y)$ du segment réel $[PQ]$, il existe un point $M(i,j)$ de X tel que $\max(|i-x|, |j-y|) < 1$.

Un arc discret est un **segment discret** ssi il possède cette propriété.



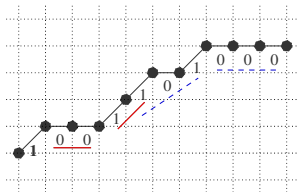
A. ROSENFELD,

Digital Straight line Segments.

IEEE Transactions on Computers, 23(12):1264-1269, 1974.

Historique des premières définitions

Propriété de régularité de Hung (85)



Propriété de régularité

Un arc 8-connexe est un **segment de droite discrète** si et seulement si le mot de cet arc ne contient pas de paire de sous-mots de même longueur dont les sommes des lettres diffèrent de deux ou plus.

Equivalence prouvée avec les critères de Freeman et Rosenfeld.



S. H. Y. HUNG,

On the straightness of digital arcs.
PAMI, 7(2):203-215, 1985.

Définition arithmétique de Réveilles (91)

Droite discrète arithmétique

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- a, b, μ, ω dans \mathbb{Z}
- a et b premiers entre eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- notée $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$



J.-P. Réveilles,

Géométrie discrète, calcul en nombres entiers et algorithmique.

Thèse d'état, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1991.

Définition arithmétique de Réveilles (91)

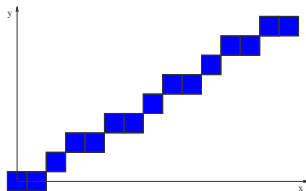
Droite discrète arithmétique

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- a, b, μ, ω dans \mathbb{Z}
- a et b premiers entre eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- notée $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$

$\omega = \max(|a|, |b|)$: \mathcal{D} est un arc
8-connexe et est appelée **droite**
naïve



$$\mathcal{D}(5, 8, -1, 8) : -1 \leq 5x - 8y < 7$$

Définition arithmétique de Réveilles (91)

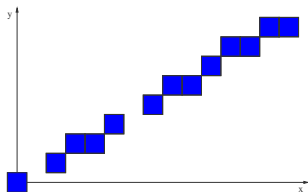
Droite discrète arithmétique

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- a, b, μ, ω dans \mathbb{Z}
- a et b premiers entre eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- notée $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$

$\omega < \max(|a|, |b|)$: \mathcal{D} n'est pas
connexe



$$\mathcal{D}(5, 8, -1, 7) : -1 \leq 5x - 8y < 6$$

Définition arithmétique de Réveilles (91)

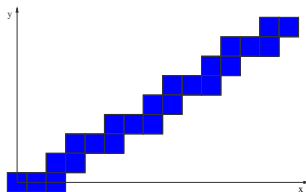
Droite discrète arithmétique

Une droite discrète de paramètres (a, b, μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points entiers (x, y) vérifiant la double inégalité :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- a, b, μ, ω dans \mathbb{Z}
- a et b premiers entre eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- notée $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$

$\omega = |a| + |b|$: \mathcal{D} est un arc
4-connexe et est appelée **droite
standard**



$$\mathcal{D}(5, 8, -1, 13) : -1 \leq 5x - 8y < 12$$

Définition arithmétique de Réveilles (91)

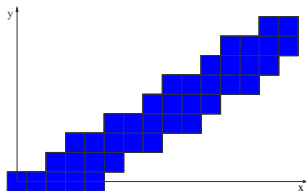
Droite discrète arithmétique

Une droite discrète de paramètres (a,b,μ) et d'épaisseur arithmétique ω est définie comme l'ensemble des points entiers (x,y) vérifiant la double inégalité :

$$\mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- a, b, μ, ω dans \mathbb{Z}
- a et b premiers entre eux, $\frac{a}{b}$ pente de la droite
- notée $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$

$\omega > |a| + |b|$: \mathcal{D} est dite **droite épaisse**



$$\mathcal{D}(5,8, -1,22) : -1 \leq 5x - 8y < 21$$

Longueurs des paliers

Propriété

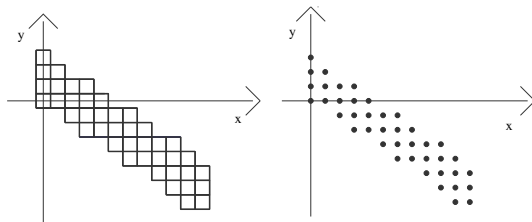
Dans une droite discrète $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$, il y a au plus :

- 2 longueurs de paliers verticaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|b|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ sinon}$$

- 2 longueurs de paliers horizontaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|a|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ sinon}$$



$$\mathcal{D}(7, -10, 0, 34) : 0 \leq 7x + 10y < 34$$

Longueurs des paliers

Propriété

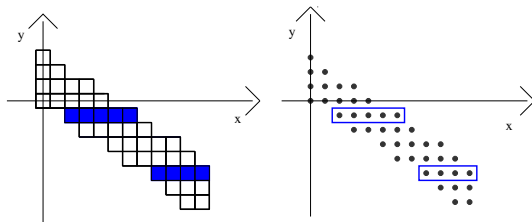
Dans une droite discrète $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$, il y a au plus :

- 2 longueurs de paliers verticaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|b|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ sinon}$$

- 2 longueurs de paliers horizontaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|a|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ sinon}$$



$$\mathcal{D}(7, -10, 0, 34) : 0 \leq 7x + 10y < 34$$

Longueurs des paliers

Propriété

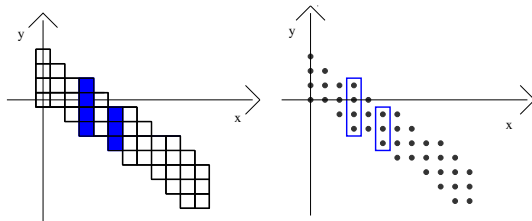
Dans une droite discrète $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$, il y a au plus :

- 2 longueurs de paliers verticaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|b|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|b|} \right\rfloor \text{ sinon}$$

- 2 longueurs de paliers horizontaux :

$$\left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ et } \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor + 1 \text{ si } \left\{ \frac{\omega}{|a|} \right\} \neq 1, \left\lfloor \frac{\omega}{|a|} \right\rfloor \text{ sinon}$$

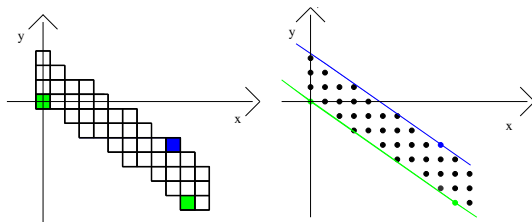


$$\mathcal{D}(7, -10, 0, 34) : 0 \leq 7x + 10y < 34$$

Droites et points d'appui

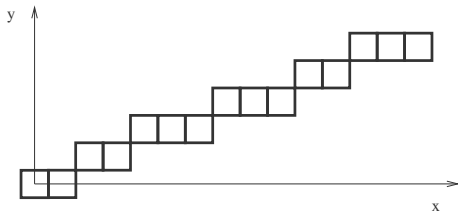
Définition

- Droites d'appui de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:
Droites réelles $ax - by = \mu$ et $ax - by = \mu + \omega - 1$
- Points d'appui de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$
- Segment reconnu de \mathcal{D} : segment de \mathcal{D} possédant au moins 3 points d'appui



Segment reconnu de $\mathcal{D}(7, -10, 0, 34)$: $0 \leq 7x + 10y < 34$

Algorithme de construction d'une droite naïve



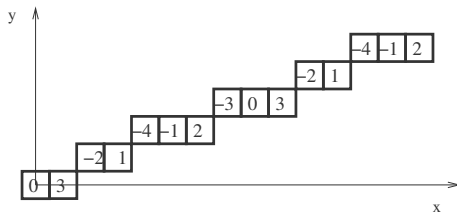
$$\mathcal{D}(3,8, -4,8), x \in [0,14], -4 \leq 3x - 8y < 4$$

Définition

Reste au point M en fonction de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:

$$r_{\mathcal{D}}(M) = ax_M - by_M$$

Algorithme de construction d'une droite naïve



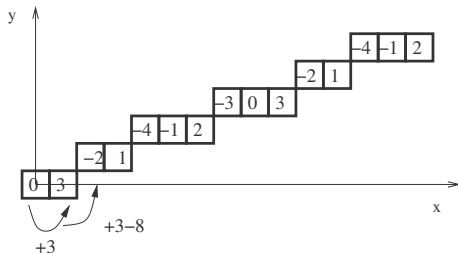
$$\mathcal{D}(3,8, -4,8), x \in [0,14], -4 \leq 3x - 8y < 4$$

Définition

Reste au point M en fonction de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:

$$r_{\mathcal{D}}(M) = ax_M - by_M$$

Algorithme de construction d'une droite naïve



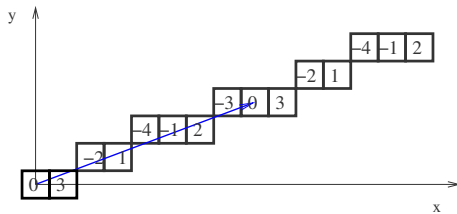
$$\mathcal{D}(3,8, -4,8), x \in [0,14], -4 \leq 3x - 8y < 4$$

Définition

Reste au point M en fonction de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:

$$r_{\mathcal{D}}(M) = ax_M - by_M$$

Périodicité



$$\mathcal{D}(3,8, -4,8), x \in [0,14], -4 \leq 3x - 8y < 4$$

Périodicité

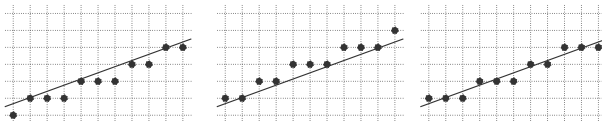
La droite $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$ est invariante par la translation $k.(b,a)^T$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Lien avec la discrétisation

Droites arithmétiques et discrétisation

Soit une droite euclidienne Δ d'équation $ax - by - \mu = 0$, avec a , b et μ dans \mathbb{Z} . Alors :

- Discrétisation **OBQ** de Δ : $\mathcal{D}(a, b, -\mu, \max(|a|, |b|))$;
- Discrétisation **BBQ** de Δ : $\mathcal{D}(a, b, -\mu + \max(|a|, |b|) - 1, \max(|a|, |b|))$;
- Discrétisation **GIQ** de Δ : $\mathcal{D}(a, b, -\mu + \lfloor \frac{b}{2} \rfloor, \max(|a|, |b|))$.



Discrétisation OBQ (par défaut), BBQ (par excès), au plus proche (GIQ)

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

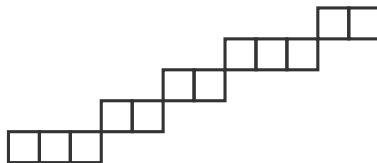
Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

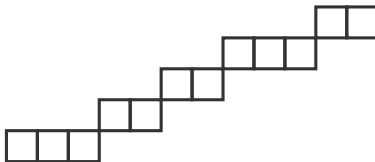
Bibliographie

Reconnaissance : le problème



Est-ce un segment de droite naïve?

Reconnaissance : le problème



Est-ce un segment de droite naïve?

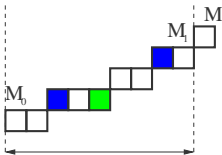
Approche :

- Arithmétique
- Incrémentale



I. DEBLED-RENNESON, J.-P. REVEILLES,
A linear algorithm for segmentation of digital curves.
IJPRAI, 9(6), 1995.

Algorithme arithmétique

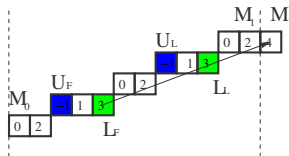


Croissance d'un segment de droite naïve

Soit $S = M_0M_1$ un segment reconnu de $\mathcal{D}(a,b,\mu, \max(|a|,|b|))$, M un point ajouté à S :

- (i) $\mu \leq r_{\mathcal{D}}(M) < \mu + \max(|a|,|b|)$: $M \in \mathcal{D}$,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de \mathcal{D} ,
- (ii) $r_{\mathcal{D}}(M) = \mu + \max(|a|,|b|)$: M est faiblement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de la droite naïve de pente $L_F M$,
- (iii) $r_{\mathcal{D}}(M) = \mu - 1$: M est faiblement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de la droite naïve de pente $U_F M$,
- (iv) $r_{\mathcal{D}}(M) < \mu - 1$ ou $r_{\mathcal{D}}(M) > \mu + \max(|a|,|b|)$: M est fortement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ n'est pas un segment de droite naïve.

Algorithme arithmétique



$S = M_0 M_1$ segment reconnu de $\mathcal{D}(2,5, -1,5)$

$S \cup \{M\}$ segment reconnu de $\mathcal{D}'(3,8, -3,8)$.

Croissance d'un segment de droite naïve

Soit $S = M_0 M_1$ un segment reconnu de $\mathcal{D}(a,b,\mu, \max(|a|,|b|))$, M un point ajouté à S :

- (i) $\mu \leq r_{\mathcal{D}}(M) < \mu + \max(|a|,|b|)$: $M \in \mathcal{D}$,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de \mathcal{D} ,
- (ii) $r_{\mathcal{D}}(M) = \mu + \max(|a|,|b|)$: M est faiblement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de la droite naïve de pente $L_F M$,
- (iii) $r_{\mathcal{D}}(M) = \mu - 1$: M est faiblement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ est un segment de la droite naïve de pente $U_F M$,
- (iv) $r_{\mathcal{D}}(M) < \mu - 1$ ou $r_{\mathcal{D}}(M) > \mu + \max(|a|,|b|)$: M est fortement extérieur à \mathcal{D} ,
 $S \cup \{M\}$ n'est pas un segment de droite naïve.

Algorithme arithmétique dans le premier octant

Entrée : E , une suite de n pixels 8-connexes

Initialisation :

$a = 0$; $b = 1$; $\mu = 0$;

$M = (0,0)$ premier point de E ;

$U_F = L_F = U_L = L_L = M$; $SEGMENT = VRAI$;

Tant que E n'a pas été entièrement parcouru faire

$M =$ point suivant de E ;

$r(M) = ax_M - by_M$;

Si $r(M) = \mu - 1$ alors

$L_F = L_L$; $U_L = M$;

$a = y_M - y_{U_F}$; $b = x_M - x_{U_F}$;

$\mu = ax_M - by_M$;

Fsi

Si $r(M) = \mu + b$ alors

$U_F = U_L$; $L_L = M$;

$a = y_M - y_{L_F}$; $b = x_M - x_{L_F}$;

$\mu = ax_M - by_M - b + 1$;

Fsi

Si $r(M) < \mu - 1$ ou $r(M) > \mu + b$ alors $SEGMENT = FAUX$; Fsi

Si $r(M) = \mu$ alors $U_L = M$; Fsi

Si $r(M) = \mu + b - 1$ alors $L_L = M$; Fsi

FTq

Complexité : $O(n)$

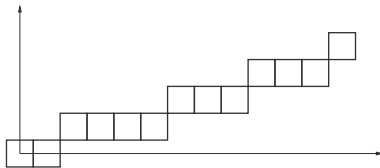
Géométrie
DiscrèteMotivations
Notions de
baseDroites
discrètesPremières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

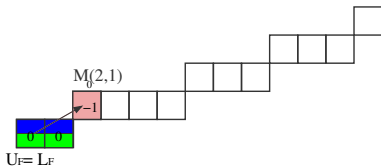
Algorithme arithmétique un exemple



Initialisation : $a = 0$, $b = 1$, $\mu = 0$, $D_0(0,1,0,1)$

$$0 \leq -y < 1$$

Algorithme arithmétique un exemple



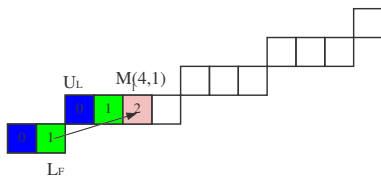
$$a_0 = 0, b_0 = 1, \mu_0 = 0, D_0(0,1,0,1)$$

$$0 \leq -y < 1$$

$$r_0(M_0) = -1 \Rightarrow a_1 = 1, b_1 = 2, \mu_1 = 0, D_1(1,2,0,2)$$

$$0 \leq x - 2y < 2$$

Algorithme arithmétique un exemple



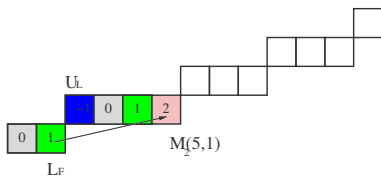
$$a_1 = 1, b_1 = 2, \mu_1 = 0, D_1(1,2,0,2)$$

$$0 \leq x - 2y < 2$$

$$r_1(M_1) = 2 \Rightarrow a_2 = 1, b_2 = 3, \mu_2 = -1, D_2(1,3, -1,3)$$

$$-1 \leq x - 3y < 2$$

Algorithme arithmétique un exemple



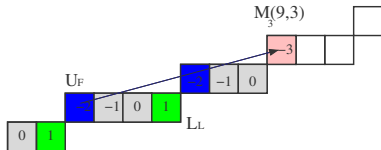
$$a_2 = 1, b_2 = 3, \mu_2 = -1, D_2(1,3, -1,3)$$

$$-1 \leq x - 3y < 2$$

$$r_2(M_2) = 2 \Rightarrow a_3 = 1, b_3 = 4, \mu_3 = -2, D_3(1,4, -2,4)$$

$$-2 \leq x - 4y < 2$$

Algorithme arithmétique un exemple



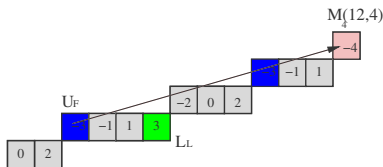
$$a_3 = 1, b_3 = 4, \mu_3 = -2, D_3(1, 4, -2, 4)$$

$$-2 \leq x - 4y < 2$$

$$r_3(M_3) = -3 \Rightarrow a_4 = 2, b_4 = 7, \mu_4 = -3, D_4(2, 7, -3, 7)$$

$$-3 \leq 2x - 7y < 4$$

Algorithme arithmétique un exemple



$$a_4 = 2, b_4 = 7, \mu_4 = -3, D_4(2,7, -3,7)$$

$$-3 \leq 2x - 7y < 4$$

$$r_4(M_4) = -4 \Rightarrow a_5 = 3, b_5 = 10, \mu_5 = -4, D_5(3,10, -4,10)$$

$$-4 \leq 3x - 10y < 6$$

Algorithme arithmétique de reconnaissance de segments de droites naïves

- **Incrémental**
- **Linéaire**
- Donne les paramètres de la droite support $\mathcal{D}(a,b,\mu)$ du segment reconnu tels que b soit minimal
- S'étend simplement aux droites standards

Autres Algorithmes

Préimage

La **préimage** d'un ensemble $X = \{(x_i, y_i)\}$ de pixels est l'ensemble des droites dont la discrétisation contient X

Discrétisation OBQ de $mx - y + b = 0$, avec $m \leq 1$:

$$\{(x, y) \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq mx - y + b < 1\}$$

Préimage de X :

Intersection des demi-espaces $E^+ : \alpha x_i - y_i + \beta \geq 0$ et $E^- : \alpha x_i - y_i + \beta < 1$ dans l'espace des paramètres $(O\alpha\beta)$

■ Préimage d'un ensemble 8-connexe de pixels



M. Lindenbaum, A. Bruckstein,

On recursive, $\mathcal{O}(N)$ Partitioning of a digitized curve into Digital Straight Segments.
PAMI, 15(9):949-953, 1993.



L. Buzer,

An incremental linear time algorithm for digital line and plane recognition using a linear incremental feasibility problem.
LNCS, 2301:372-381, 2002.

Applications de la reconnaissance

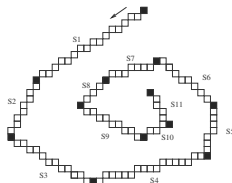
- 1** Segmentation et polygonalisation de courbes discrètes 2D
 - Nombre minimal de segments, convexité, ...
- 2** Calculs de paramètres géométriques sur une courbe discrètes 2D
 - Longueur, courbure
- 3** Courbes discrètes 3D
 - Reconnaissance
 - Segmentation
 - Longueur, courbure

Segmentation de courbes discrètes

Premier algorithme

Objectif : **Segmentation maximale d'une courbe discrète**

Décomposer une courbe discrète en segments de droites discrètes naïves de longueurs maximales à partir d'un point donné de la courbe



Symétries des droites discrètes naïves
Algorithme de reconnaissance



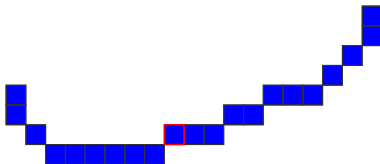
Algorithme linéaire de segmentation de courbes discrètes

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Segment maximal ou fondamental d'une courbe discrète

Soit C une courbe discrète, un segment de droite discrète est dit **maximal** si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur C en restant un segment de droite discrète.



F. FESCHET, L. TOUGNE,

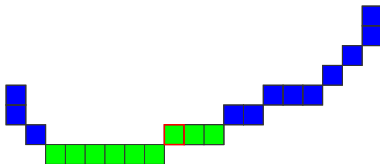
Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Segment maximal ou fondamental d'une courbe discrète

Soit C une courbe discrète, un segment de droite discrète est dit **maximal** si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur C en restant un segment de droite discrète.



F. FESCHET, L. TOUGNE,

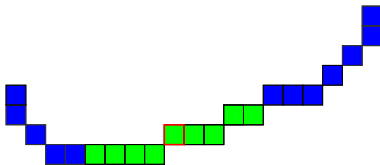
Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Segment maximal ou fondamental d'une courbe discrète

Soit C une courbe discrète, un segment de droite discrète est dit **maximal** si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur C en restant un segment de droite discrète.



F. FESCHET, L. TOUGNE,

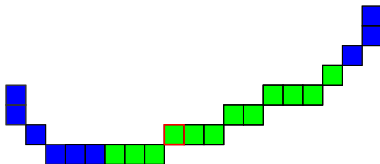
Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
 DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Segment maximal ou fondamental d'une courbe discrète

Soit C une courbe discrète, un segment de droite discrète est dit **maximal** si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur C en restant un segment de droite discrète.



F. FESCHET, L. TOUGNE,

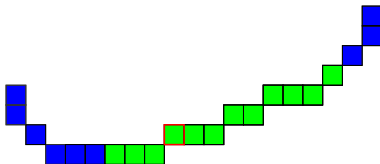
Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Segment maximal ou fondamental d'une courbe discrète

Soit C une courbe discrète, un segment de droite discrète est dit **maximal** si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur C en restant un segment de droite discrète.



Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



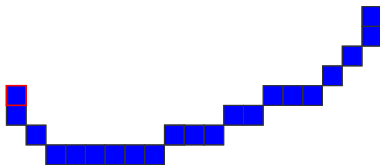
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



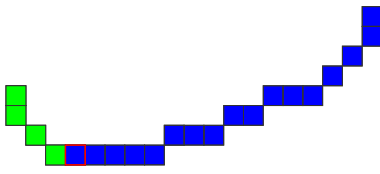
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



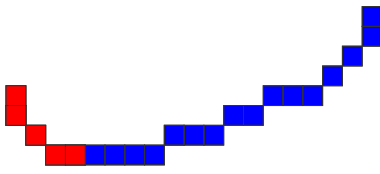
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



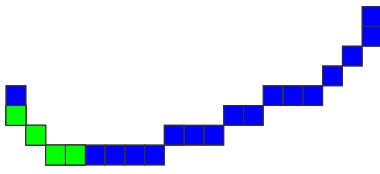
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



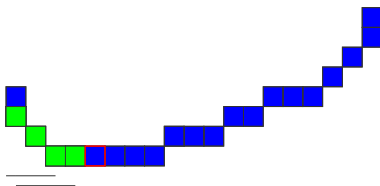
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



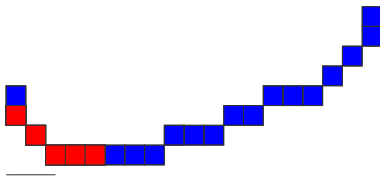
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



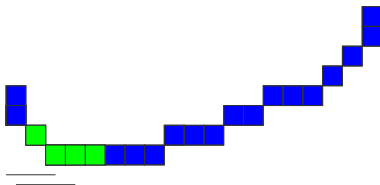
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



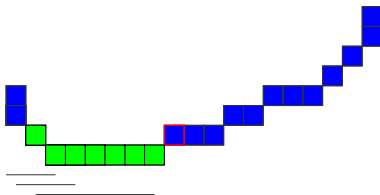
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



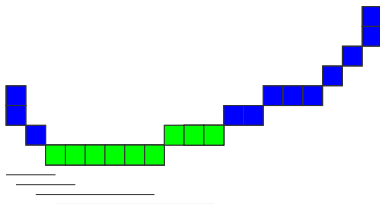
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



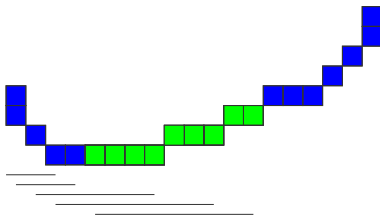
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



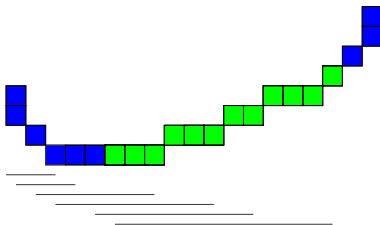
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



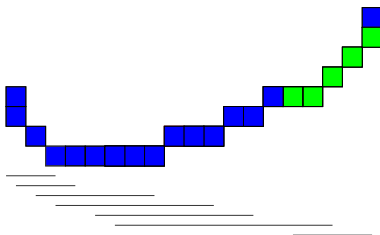
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



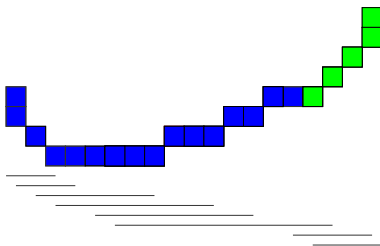
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Algorithme de segmentation d'une courbe discrète en segments maximaux

Algorithme de calcul des segments maximaux d'une courbe de n points
complexité $O(n)$



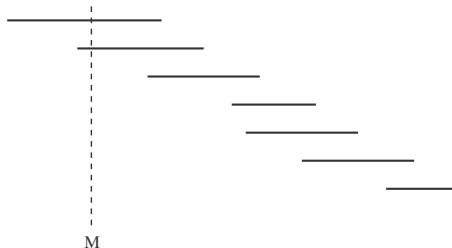
F. FESCHET, L. TOUGNE,

Optimal Time Computation of the Tangent of a Discrete Curve: Application to the Curvature.
DGCI'99, LNCS 1568, pp.: 31-40, 1999.

Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

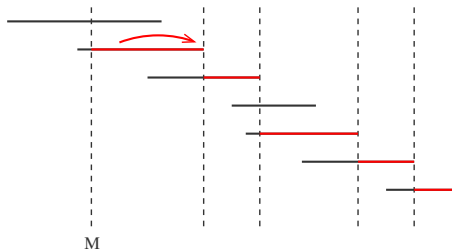
Toutes les segmentations maximales d'une courbe discrète peuvent être retrouvées à partir de sa décomposition en segments maximaux.



Segmentation de courbes discrètes

Segments maximaux d'une courbe discrète

Toutes les segmentations maximales d'une courbe discrète peuvent être retrouvées à partir de sa décomposition en segments maximaux.



Segmentation de courbes discrètes

Utilisation des segments maximaux d'une courbe discrète

Deux segmentations maximales d'une courbe fermée ont un nombre de segment pouvant différer de 1.

Dans une courbe discrète fermée, si un segment maximal possède des points non recouverts par un autre segment maximal, en choisissant son extrémité gauche comme point de départ de la segmentation, la segmentation obtenue contiendra un nombre minimal de segment.

Etude des estimateurs de tangentes et de courbures obtenus à partir de la décomposition d'une courbe en segments maximaux.



F. FESCHET, L. TOUGNE,

On the min DSS problem of closed discrete curves.
Discrete Applied Mathematics 151(1-3): 138-153, 2005.



F. DE VIEILLEVILLE, J.O. LACHAUD, F. FESCHET,

Maximal Digital Straight Segments and Convergence of Discrete Geometric Estimators.
SCIA, LNCS 3540: 988-997, 2005.



J.O. LACHAUD, A. VIALARD, F. DE VIEILLEVILLE,

Analysis and Comparative Evaluation of Discrete Tangent Estimators.
DGCI, LNCS 3429: 240-251, 2005.

Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Convexité discrète

Un objet discret O est convexe ssi son enveloppe convexe euclidienne ne contient pas de point entier du complémentaire de O .

Propriété de l'aire

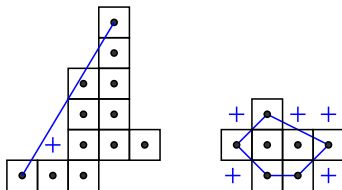
Un objet discret O est convexe ssi pour tout couple de points A et B de O , $P(O,A,B)$ ne contient pas de point entier du complémentaire de $P(O,A,B)$, $P(O,A,B)$ étant le polygone formé par le segment AB et les arêtes de O .



C. E. KIM, A. ROSENFELD,
Digital Straightness and Convexity .
STOC : 80-89, 1981.



C. E. KIM, J. SLANSKY,
Digital and cellular convexity.
Pattern Recognition 15(5): 359-367, 1982.



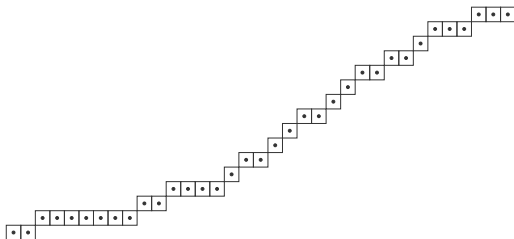
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



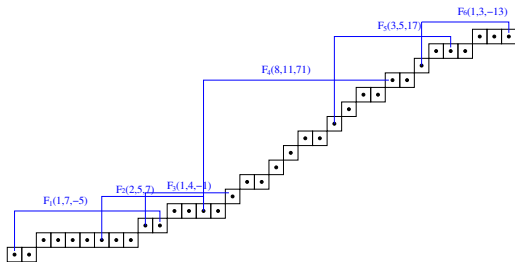
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



$p_1 = 0.14 < p_2 = 0.4$, portion
maximale convexe
 $p_2 = 0.4 > p_3 = 0.25$, portion
maximale concave
 $p_3 = 0.25 < p_4 = 0.72$, portion
maximale convexe
 $p_4 = 0.72 > p_5 = 0.6 > p_6 =$
 0.33 , portion maximale concave

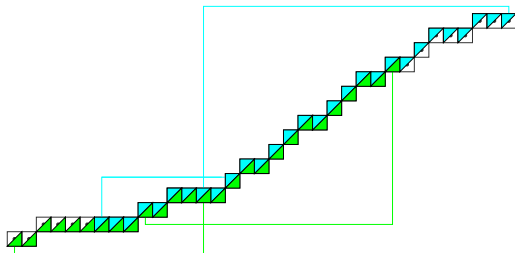
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



$p_1 = 0.14 < p_2 = 0.4$, portion maximale convexe
 $p_2 = 0.4 > p_3 = 0.25$, portion maximale concave
 $p_3 = 0.25 < p_4 = 0.72$, portion maximale convexe
 $p_4 = 0.72 > p_5 = 0.6 > p_6 = 0.33$, portion maximale concave

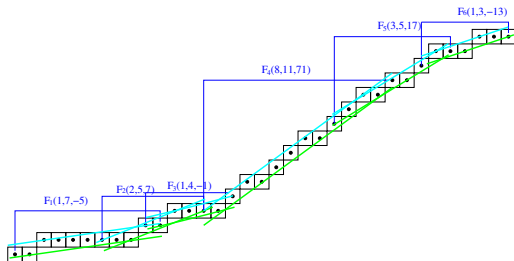
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



Décomposition suivant les droites
d'appuis des segments maximaux

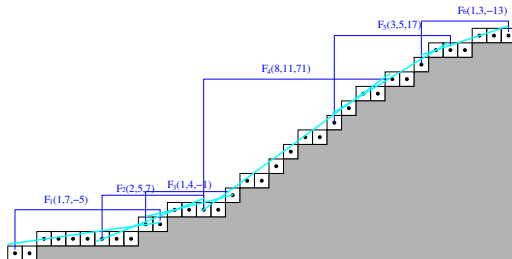
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



Décomposition suivant les droites
d'appui des segments maximaux

Les sommets de la polygonalisation ne
sont pas forcément entiers

Réversibilité: la courbe discrète
correspond à une discrétisation par
défaut du polygone réel



H. DÖRKSEN-REITER, I.
DEBLED-RENNESON,
*A Linear Algorithm for
Polygonal Representations of
Digital Sets.*
IWCIA, LNCS 4040: 307-319,
2006.

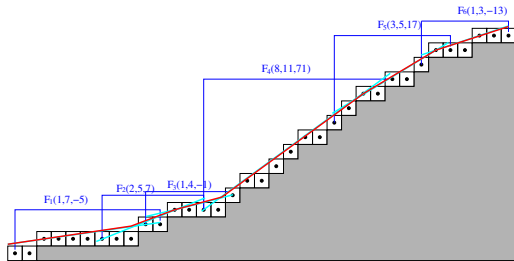
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



Décomposition suivant les droites
d'appui des segments maximaux

Les sommets de la polygonalisation ne
sont pas forcément entiers

Réversibilité: la courbe discrète
correspond à une discrétisation par
défaut du polygone réel



H. DÖRKSEN-REITER, I.
DEBLED-RENNESON,
*A Linear Algorithm for
Polygonal Representations of
Digital Sets.*
IWCIA, LNCS 4040: 307-319,
2006.

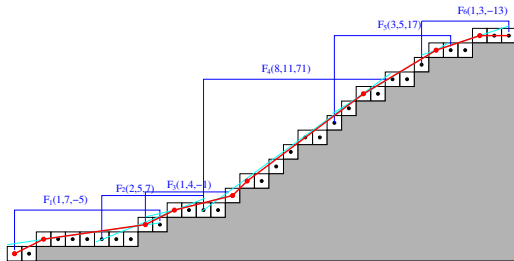
Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

Travail sur le bord d'un objet discret (1er octant)

Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une 8-courbe C du bord de O est dite convexe (resp. concave) si les segments maximaux de C ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).



Décomposition suivant les droites
d'appuis des segments maximaux

Les sommets de la polygonalisation ne
sont pas forcément entiers

Algorithme permettant d'obtenir une
polygonalisation respectant les
convexités et concavités avec des
sommets entiers si elle existe.



H. DÖRKSEN-REITER, I.
DEBLED-RENNESON,
*A Linear Algorithm for
Polygonal Representations of
Digital Sets.*
IWICIA, LNCS 4040: 307-319,
2006.

Polygonalisation de courbes discrètes

Autre approche

Polygonalisation de 4-courbes : sommets quelconques mais la discrétisation standard (GIQ) du polygone obtenu doit correspondre à la courbe discrète initiale.

Utilisation de la pré-image.



I. SIVIGNON, R. BRETON, F. DUPONT, E. ANDRES,
Discrete analytical curve reconstruction without patches.
Image Vision Computing, 23(2), 2005.



M. DEXET, E. ANDRES,
Linear Discrete Line Recognition and Reconstruction based on a Generalized Preimage.
IWCIA, LNCS 4040 : 174-188, 2006.

Droites discrètes 3D

Première définition

Droite discrète 3D

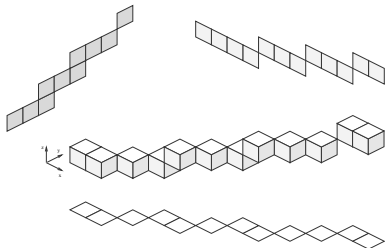
Une **droite discrète 3D**, notée $\mathcal{D}(a,b,c,\mu,\mu',e,e')$, de vecteur directeur (a,b,c) , avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, et $a \geq b \geq c$ est définie comme l'ensemble des points (x,y,z) de \mathbb{Z}^3 vérifiant:

$$\mathcal{D} \begin{cases} \mu \leq cx - az < \mu + e & (1) \\ \mu' \leq bx - ay < \mu' + e' & (2) \end{cases}$$

avec $\mu, \mu', e, e' \in \mathbb{Z}$. e et e' sont les épaisseurs arithmétiques de \mathcal{D} .

Droite naïve : $e = e' = a$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x - 10z < 10 \\ 0 \leq 7x - 10y < 10 \end{cases}$$



Droites discrètes 3D

Première définition

Droite discrète 3D

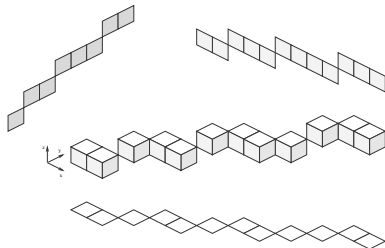
Une **droite discrète 3D**, notée $\mathcal{D}(a,b,c,\mu,\mu',e,e')$, de vecteur directeur (a,b,c) , avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, et $a \geq b \geq c$ est définie comme l'ensemble des points (x,y,z) de \mathbb{Z}^3 vérifiant:

$$\mathcal{D} \begin{cases} \mu \leq cx - az < \mu + e & (1) \\ \mu' \leq bx - ay < \mu' + e' & (2) \end{cases}$$

avec $\mu, \mu', e, e' \in \mathbb{Z}$. e et e' sont les épaisseurs arithmétiques de \mathcal{D} .

Droite naïve : $e = e' = a$

$$\begin{cases} -5 \leq 3x - 10z < 5 \\ 0 \leq 7x - 10y < 10 \end{cases}$$



Droites discrètes 3D

Première définition

Droite discrète 3D

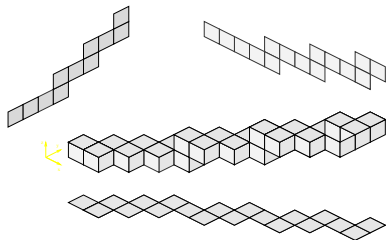
Une **droite discrète 3D**, notée $\mathcal{D}(a,b,c,\mu,\mu',e,e')$, de vecteur directeur (a,b,c) , avec $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$, et $a \geq b \geq c$ est définie comme l'ensemble des points (x,y,z) de \mathbb{Z}^3 vérifiant:

$$\mathcal{D} \begin{cases} \mu \leq cx - az < \mu + e & (1) \\ \mu' \leq bx - ay < \mu' + e' & (2) \end{cases}$$

avec $\mu, \mu', e, e' \in \mathbb{Z}$. e et e' sont les épaisseurs arithmétiques de \mathcal{D} .

Droite 6-connexe:
 $e \geq a + c$ et $e' \geq a + b$

$$\begin{cases} 0 \leq 3x - 10z < 13 \\ -9 \leq 7x - 10y < 8 \end{cases}$$



Droites discrètes 3D

Algorithme de reconnaissance de segments de droites 3D naïves

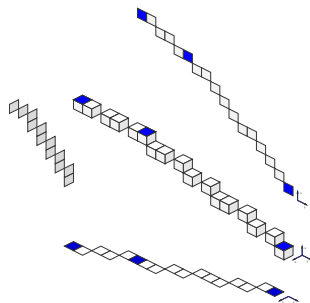
Entrée: S une suite 26-connexe de voxels à analyser

- Si les voxels de S ne se projettent pas bijectivement sur 2 plans de projection, S n'est pas un segment de droite naïve 3D,
- Sinon, appliquer l'algorithme de reconnaissance des segments de droites discrètes 2D sur les plans de projection valides,

Si 2 des courbes situées dans les plans de projection sont des segments de droites discrètes 2D alors S est un segment de droite discrète naïve 3D

Sinon S n'est pas un segment de droite discrète naïve 3D

Complexité: $O(n)$



Segment 1 de vecteur directeur $(2, -5, 4)$

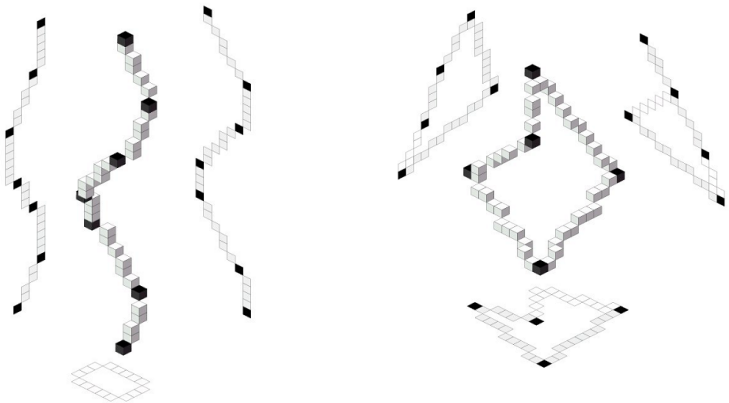
$$\begin{cases} -4 \leq -4x - 5z < 1 \\ -2 \leq -2x - 5y < 3 \end{cases}$$

Segment 2 de vecteur directeur $(1, -2, 1)$

$$\begin{cases} 0 \leq x - 2z < 2 \\ 0 \leq x - 2y < 2 \end{cases}$$

Segmentation de courbes discrètes 3D

Exemples



Courbes discrètes 3D

Autres travaux

Extraction de paramètre géométriques:

- Estimateur de longueur d'une courbe discrète 3D:
Somme des longueurs des segments obtenus avec l'algorithme de segmentation
- Estimateur de courbure en chaque point d'une courbe discrète 3D:
Basée sur le cercle osculateur

Polygonalisation de courbes discrètes 3D en droites standards 3D:

Utilisation des préimages dans les plans de projection. La polygonalisation obtenue permet de retrouver les points discrets initiaux par discrétisation GIQ.



D. COEURJOLLY, I. DEBLED-RENNESON, O. TEYTAUD
Segmentation and Length Estimation of 3D Discrete Curves.
Digital and Image Geometry, LNCS 2243 : 299-317, 2000.



D. COEURJOLLY, S. SVENSSON,
Estimation of Curvature along Curves with Application to Fibres in 3D Images of Paper.
SCIA LNCS 2749: 247-254, 2003.



I. SIVIGNON, F. DUPONT, J-M. CHASSERY,
Reversible Polygonalization of a 3D Planar Discrete Curve: Application on Discrete Surfaces.
DGCI, LNCS 3429: 347-358, 2005.

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

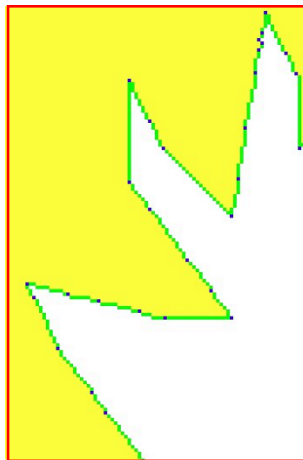
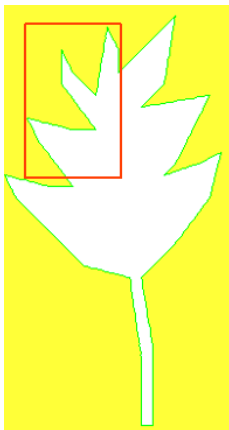
Bibliographie

Plan

- 1** Géométrie Discrète
 - Motivations
 - Notions de base
- 2** Droites discrètes
 - Premières définitions
 - Définition arithmétique
 - Reconnaissance
 - Applications
- 3** Segments flous
 - Motivations
 - Définition
 - Reconnaissance
 - Applications
- 4** Bibliographie

Reconnaissance trop stricte

Limite des algorithmes de segmentation en segments de droites discrètes naïves.



Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

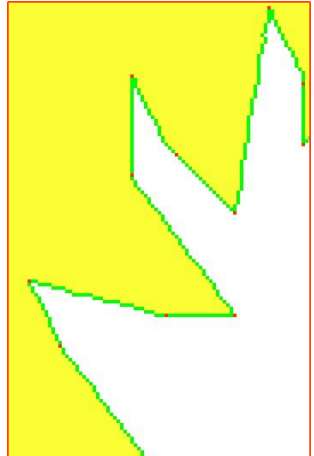
Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Objectifs

- Ce que nous voulons obtenir ...



Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

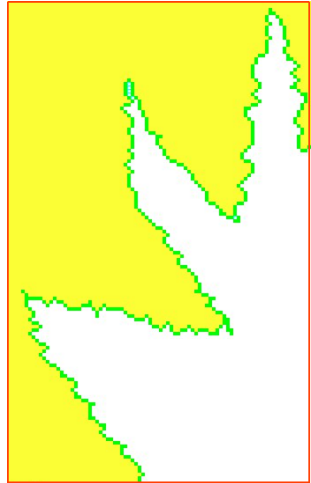
Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

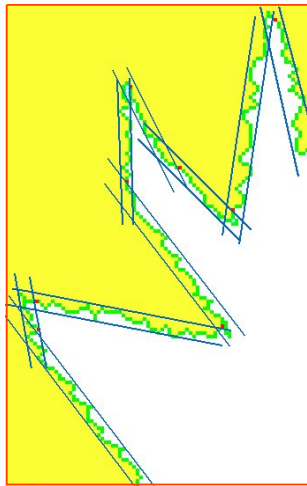
Objectifs

- Ce que nous voulons obtenir ...
 - ▷ Egalement pour des courbes très bruitées



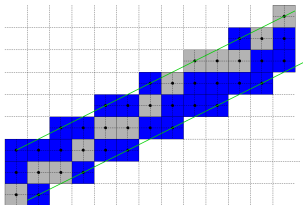
Objectifs

- Ce que nous voulons obtenir ...
 - ▷ Egalement pour des courbes très bruitées
- Idée générale
 - ▷ Découper la courbe en droites épaisses pour une épaisseur maximale donnée



Les segments flous

Droite englobante

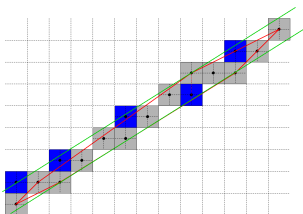


$\mathcal{D}(1,2, -4,6)$, droite englobante de la suite de points grisés

Soit Sf une suite de points d'une courbe 8-connecte. Une droite discrète $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$ est dite **englobante** pour Sf si tous les points de Sf appartiennent à \mathcal{D} .

Les segments flous

Droite englobante



$\mathcal{D}(5,8,-8,11)$, droite englobante optimale (ep $\frac{10}{8} = 1.25$) de la suite de points grisés

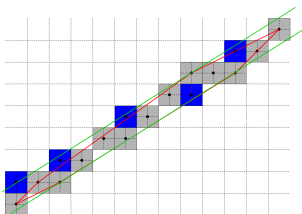
Soit Sf une suite de points d'une courbe 8-connecte. Une droite discrète $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$ est dite **englobante** pour Sf si tous les points de Sf appartiennent à \mathcal{D} .

Une **droite englobante** $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$ de Sf est dite **optimale** si son épaisseur verticale est égale à l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de Sf .

▷ épaisseur verticale de $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$: $\frac{\omega-1}{\max(|a|,|b|)}$

Les segments flous

Droite englobante



La suite de points grisés est un segment flou d'épaisseur 2

Soit S_f une suite de points d'une courbe 8-connexe. Une droite discrète $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ est dite **englobante** pour S_f si tous les points de S_f appartiennent à \mathcal{D} .

Une **droite englobante** $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ de S_f est dite **optimale** si son épaisseur verticale est égale à l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de S_f .

▷ épaisseur verticale de $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$: $\frac{\omega-1}{\max(|a|, |b|)}$

S_f est un **segment flou d'épaisseur** ν ssi sa droite optimale englobante a une épaisseur verticale inférieure ou égale à ν .

Reconnaissance des segments flous

Le principe

Calcul de l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de Sf

- Même principe que le Rotating Calipers [HouleToussaint88]
- Positions extrêmes
- Calcul incrémental linéaire de l'enveloppe convexe
 - algorithme de Melkman



M.E. Houle, G.T. Toussaint,
Computing the width of a set.
PAMI, 10(5):761–765, 1988.



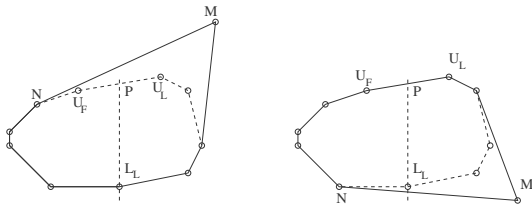
A. Melkman,
On-line Construction of the Convex Hull of a Simple Polygon.
Information Processing Letters, 25:11–12, 1987.

Reconnaissance des segments fous

Le principe

Ajout d'un point $M(x,y)$ à un segment fou $S_f = \{(x_i, y_i), 0 \leq i < n\}$ de droite englobante optimal $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$ dans le premier octant avec $x > x_{n-1}$, 3 cas sont possibles :

- M appartient à \mathcal{D} ,
 $S'_f = S_f \cup M$ est un segment fou de droite englobante optimal \mathcal{D} ,
- M est au dessus de \mathcal{D} ,
- M est en dessous de \mathcal{D} .

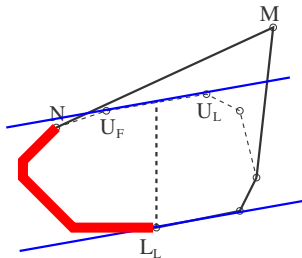


Reconnaissance des segments fous

Le principe

Ajout d'un point M à un segment fou Sf de droite englobante optimal $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:

M est au dessus de \mathcal{D} et l'épaisseur verticale de Sf est obtenue au point L_L .

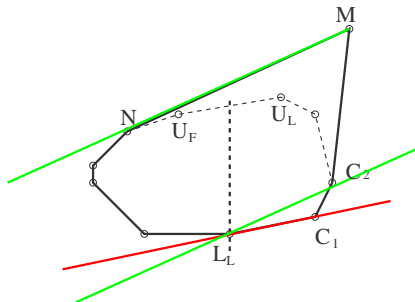


- Objectif : trouver la droite englobante optimale \mathcal{D}' de $S'f = Sf \cup M$.
- Propriété : la distance verticale dans un convexe est une fonction concave et le maximum est atteint à l'intérieur du convexe.
- Trouver la position du maximum dans le nouveau convexe
 ⇒ nécessairement à droite de L_L

Reconnaissance des segments flous

Le principe

Ajout d'un point M à un segment flou S_f de droite englobante optimal $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:

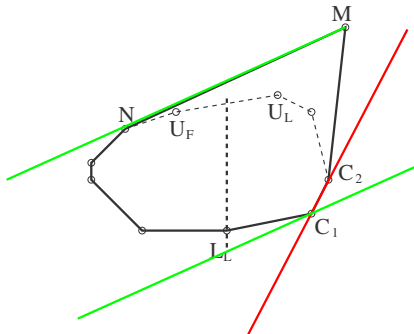


- Parcours des points de l'enveloppe convexe inférieure à droite de L_L
- Test : pente de $[L_L C_1] >$ pente de $[NM]$? FAUX \Rightarrow Passer au point suivant

Reconnaissance des segments flous

Le principe

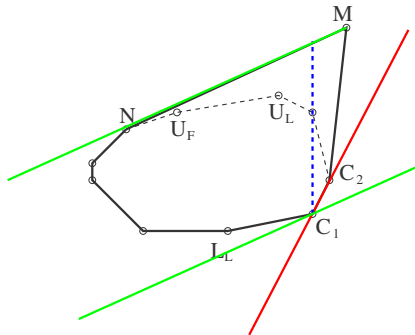
Ajout d'un point M à un segment flou Sf de droite englobante optimal $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:



- Parcours des points de l'enveloppe convexe inférieure à droite de L_L
- Test : pente de $[C_1 C_2] >$ pente de $[NM]$? VRAI \Rightarrow STOP

Reconnaissance des segments flous

Le principe
Ajout d'un point M à un segment flou Sf de droite englobante optimal $\mathcal{D}(a,b,\mu,\omega)$:



- Parcours des points de l'enveloppe convexe inférieure à droite de L_L
- Test : pente de $[C_1 C_2] >$ pente de $[NM]$? VRAI \Rightarrow STOP

\Rightarrow L'épaisseur verticale du convexe est obtenue en C_1

\Rightarrow La droite englobante optimale de $Sf \cup M$ a pour pente \overrightarrow{NM} et pour point d'appui inférieur C_1

Reconnaissance des segments flous

L'algorithme dans le premier octant

Input: S an 8-connected sequence of integer points, ν a real value

Output: $isSegment$ a boolean value, a, b, μ, ω integers

Initialization: $isSegment = true$, $a = 0$, $b = 1$, $\omega = b$, $\mu = 0$, $M = (x_0, y_0)$

while (S is not entirely scanned and $isSegment$)

$M =$ next point of S ;

add M to the upper and lower convex hulls of the scanned part of S ;

$r = ax_M - by_M$;

if ($r = \mu$) **then** $U_L = M$;

if ($r = \mu + \omega - 1$) **then** $L_L = M$;

if ($r \leq \mu - 1$) **then**

$U_L = M$;

Let N the point before M in the upper convex hull,

$a_0 = y_M - y_N$, $b_0 = x_M - x_N$,

$a = \frac{a_0}{\gcd(a_0, b_0)}$, $b = \frac{b_0}{\gcd(a_0, b_0)}$, $\mu = ax_M - by_M$;

Find the first point C in the lower part of the convex hull starting at L_L ,

such that : slope of $[C, C_{next}] > \frac{a}{b}$;

$L_L = C$;

$\omega = ax_{L_L} - by_{L_L} - \mu + 1$;

else

if ($r \geq \mu + \omega - 1$) **then** *symmetrical case*

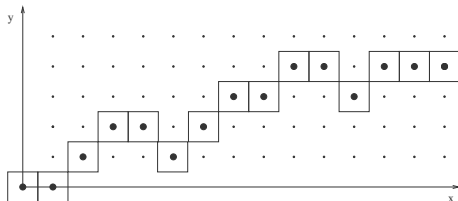
end if

$isSegment = \frac{\omega-1}{b} \leq \nu$;

end

Reconnaissance des segments flous

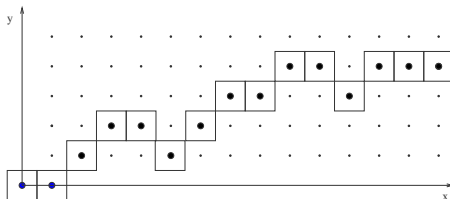
Un exemple



Suite de pixels à reconnaître, $\nu = 2$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

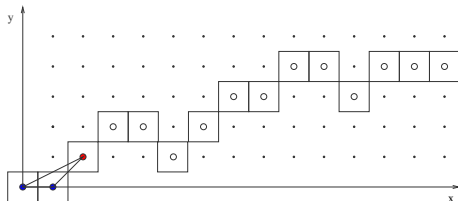


Suite de pixels à reconnaître, $\nu = 2$

$$\mathcal{D}_0(0,1,0,1) : 0 \leq -y < 1$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple



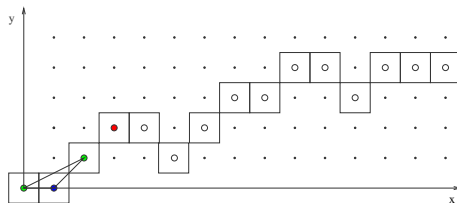
Suite de pixels à reconnaître, $\nu = 2$

$$\mathcal{D}_0(0,1,0,1) : 0 \leq -y < 1$$

Ajout du point M_3 , $r_{\mathcal{D}_0}(M_3) = -1$

Reconnaissance des segments flous

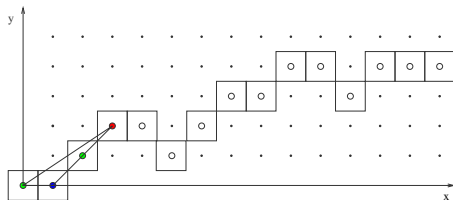
Un exemple



$$\mathcal{D}_1(1,2,0,2) : 0 \leq x - 2y < 2$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

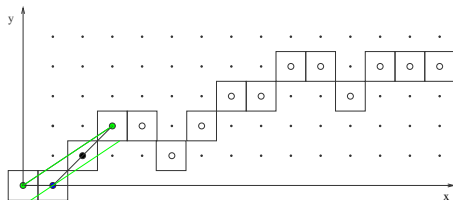


$$\mathcal{D}_1(1,2,0,2) : 0 \leq x - 2y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_4, r_{\mathcal{D}_1}(M_4) = -1$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple



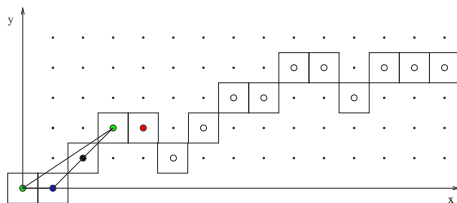
$$\mathcal{D}_1(1,2,0,2) : 0 \leq x - 2y < 2$$

Ajout du point M_4 , $r_{\mathcal{D}_1}(M_4) = -1$

$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3, d_v \simeq 0.66$$

Reconnaissance des segments flous

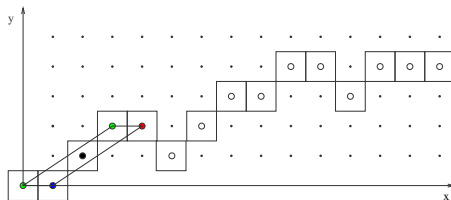
Un exemple



$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

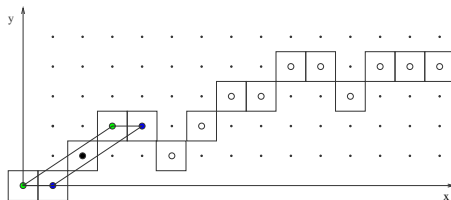


$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

$$\text{Ajout du point } M_5, r_{\mathcal{D}_2}(M_5) = 2$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

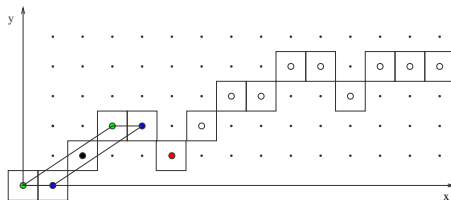


$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

$$\text{Ajout du point } M_5, r_{\mathcal{D}_2}(M_5) = 2$$

Reconnaissance des segments flous

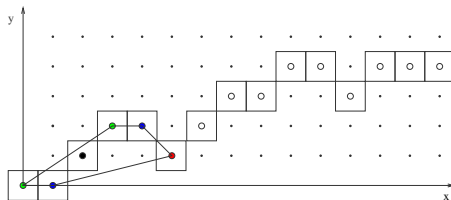
Un exemple



$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

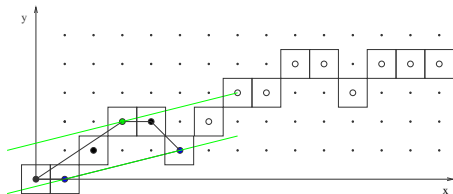


$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

$$\text{Ajout du point } M_6, r_{\mathcal{D}_2}(M_6) = 7$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple



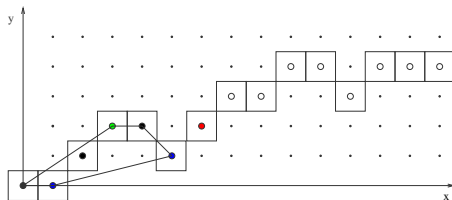
$$\mathcal{D}_2(2,3,0,3) : 0 \leq 2x - 3y < 3$$

Ajout du point M_6 , $r_{\mathcal{D}_2}(M_6) = 7$

$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2, d_v = 1.5$$

Reconnaissance des segments fous

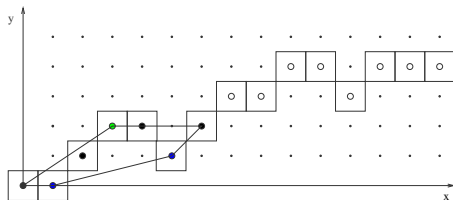
Un exemple



$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

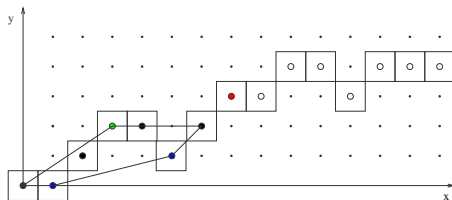


$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_7, r_{\mathcal{D}_3}(M_7) = 2$$

Reconnaissance des segments flous

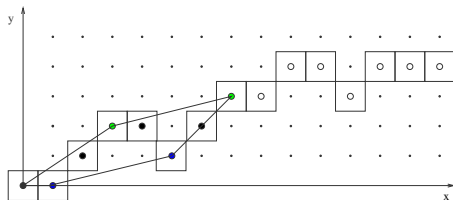
Un exemple



$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

Reconnaissance des segments fous

Un exemple

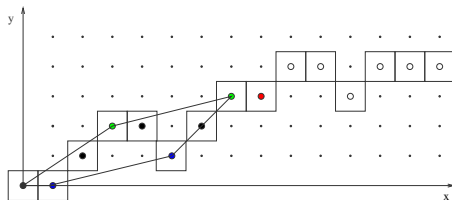


$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_8, r_{\mathcal{D}_3}(M_8) = -5$$

Reconnaissance des segments fous

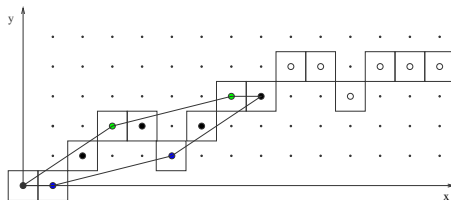
Un exemple



$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

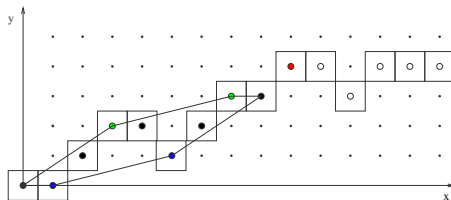


$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_9, r_{\mathcal{D}_3}(M_9) = -4$$

Reconnaissance des segments fous

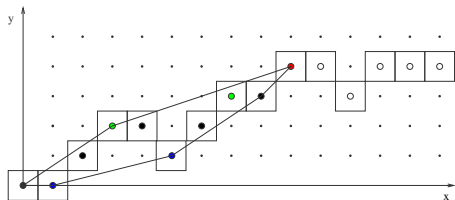
Un exemple



$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple

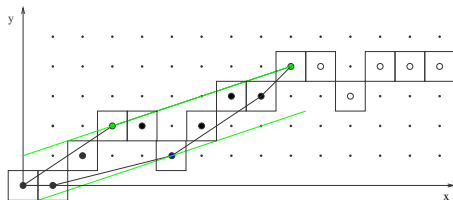


$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_{10}, r_{\mathcal{D}_3}(M_{10}) = -7$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple



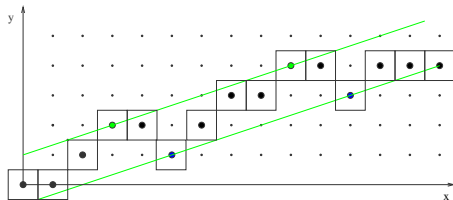
$$\mathcal{D}_3(1,4, -5,7) : -5 \leq x - 4y < 2$$

$$\text{Ajout du point } M_{10}, r_{\mathcal{D}_3}(M_{10}) = -7$$

$$\mathcal{D}_4(1,3, -3,6) : -3 \leq x - 3y < 3, d_v \simeq 1.66$$

Reconnaissance des segments flous

Un exemple



Segment flou d'épaisseur 2 de droite optimale englobante $\mathcal{D}_4(1,3, - 3,6)$

Reconnaissance des segments flous

L'algorithme

- Algorithme incremental et linéaire
 - Recherche dans une partie limitée de l'enveloppe convexe
- Extension directe aux suites de points non connectées
 - suite de points ordonnés



I. DEBLED-RENNESON, F. FESCHET, J. ROUYER-DEGLI,
Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time.
Computers and Graphics, 30(1), 2006.

Applications

1 Segmentation de courbes discrètes

- Utilisation en traitement d'images: Approximation polygonale à partir d'une analyse multi-ordre des points de contour

2 Extension de la notion de courbure discrète

- Utilisation en traitement d'images: Détection et reconstruction d'arcs de cercle et de segments dans des documents techniques

3 Segments flous 3D

- Reconnaissance, Segmentation de courbes 3D, Extraction de paramètres géométriques



I. DEBLED-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

Multiorde polygonal approximation of digital curves.

Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 5(2):98-110, August 2005.



J-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

A new method to detect arcs and segments from curvature profiles.

ICPR (3): 387-390, 2006.

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

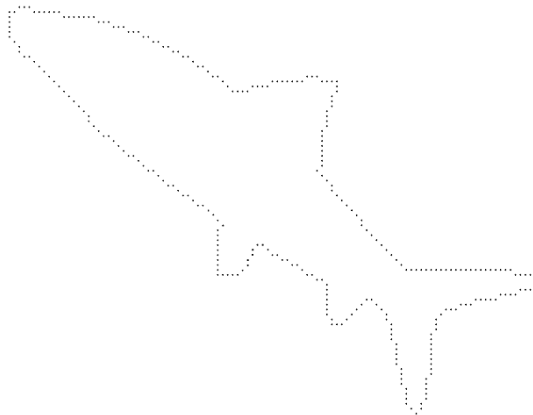
Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments fous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments fous d'épaisseur 2

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

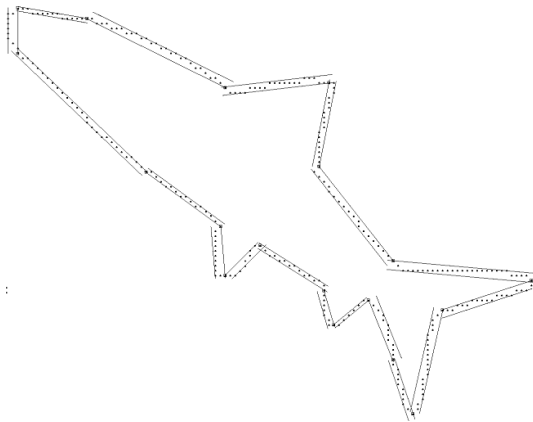
Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments fous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments fous d'épaisseur 2

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

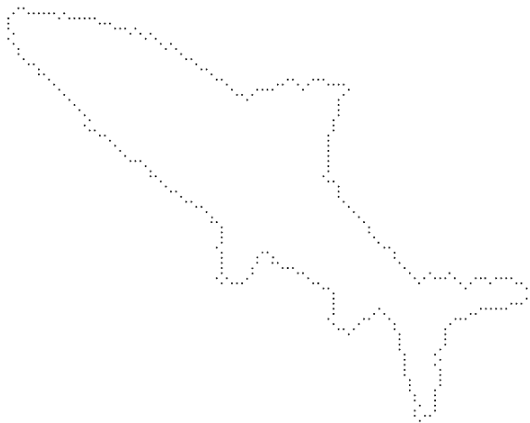
Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments fous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments fous d'épaisseur 2

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

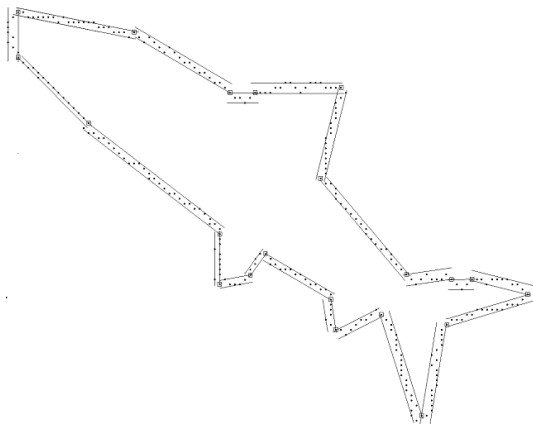
Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments fous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Segmentation de courbes discrètes

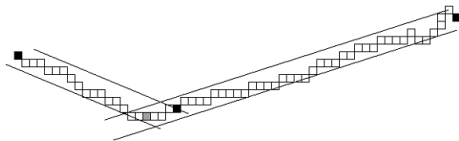


Segmentation en segments fous d'épaisseur 2

Segmentation de courbes discrètes

Comportement

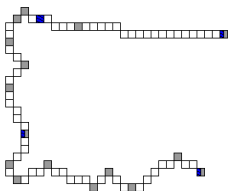
- Bons résultats pour des courbes faiblement bruitées
- Moins bonnes performances pour des courbes fortement bruitées



- L'épaisseur doit être fixée avant la segmentation

Segmentation de courbes discrètes

Approximation polygonale à partir d'une analyse multi-ordre des points de contour

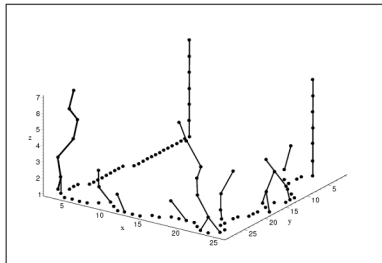


Principe générale :

- Les extrémités des segments significatifs appartiennent à la liste des points extrémités obtenus à l'épaisseur 1
- Le nombre significatif de segments est obtenu pour une segmentation à l'épaisseur la plus grande

Segmentation de courbes discrètes

Analyse multi-ordre des points de contour



Segmentation multi-ordre

Entrée: C une courbe 8-connexe

Sortie: Liste L_{MO} des points

Initialisation: $\nu = 0$, $nbpoint = 0$

```

do
   $\nu = \nu + 1$ ;
   $nbprec = nbpoint$ ;
   $nbpoint = Approx(C, \nu, L[\nu])$ ;
while  $nbpoint \neq nbprec$ 
 $L_{MO} \leftarrow L[\nu]$ 
for  $\nu_c = \nu - 1$  downto 1
   $\forall u \in L_{MO}$ 
    % One scan is enough to consider any point
    if  $\exists p \in L[\nu_c] / Dist(p, u) < Int((\nu_c + 1)/2) + 1$  then
      % shifting in multi-order space ( $p$  becomes  $u$ )
       $L_{MO} \leftarrow L_{MO} - \{u\}$ ;  $L_{MO} \leftarrow L_{MO} \cup \{p\}$ ;
    else
       $L_{MO} \leftarrow L_{MO} - \{u\}$ ; % the multioorder path is not right
    endif
  endfor
endfor

```



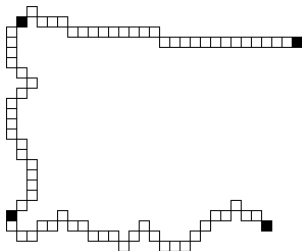
I. DEBLED-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

Multioorder polygonal approximation of digital curves.

Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 5(2):98-110, August 2005.

Segmentation de courbes discrètes

Analyse multi-ordre des points de contour



Segmentation multi-ordre

Entrée: C une courbe 8-connexe

Sortie: Liste L_{MO} des points

Initialisation: $\nu = 0$, $nbpoint = 0$

```

do    $\nu = \nu + 1$ ;
       $nbprec = nbpoint$ ;
       $nbpoint = Approx(C, \nu, L[\nu])$ ;
while  $nbpoint \neq nbprec$ 
 $L_{MO} \leftarrow L[\nu]$ 
for  $\nu_c = \nu - 1$  downto 1
   $\forall u \in L_{MO}$ 
    % One scan is enough to consider any point
    if  $\exists p \in L[\nu_c] / Dist(p, u) < Int((\nu_c + 1)/2) + 1$  then
      % shifting in multi-order space ( $p$  becomes  $u$ )
       $L_{MO} \leftarrow L_{MO} - \{u\}$ ;  $L_{MO} \leftarrow L_{MO} \cup \{p\}$ ;
    else
       $L_{MO} \leftarrow L_{MO} - \{u\}$ ; % the multioorder path is not right
    endif
  endfor
endfor

```



I. DEBLED-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

Multioorder polygonal approximation of digital curves.

Electronic Letters on Computer Vision and Image Analysis, 5(2):98-110, August 2005.

Géométrie
Discrète

Motivations
Notions de
base

Droites
discrètes

Premières
définitions
Définition
arithmétique
Reconnaissance
Applications

Segments flous

Motivations
Définition
Reconnaissance
Applications

Bibliographie

Plan

- 1 Géométrie Discrète
 - Motivations
 - Notions de base
- 2 Droites discrètes
 - Premières définitions
 - Définition arithmétique
 - Reconnaissance
 - Applications
- 3 Segments flous
 - Motivations
 - Définition
 - Reconnaissance
 - Applications
- 4 Bibliographie

Compléments bibliographiques

1 Ouvrages généraux sur la géométrie discrète

- **Géométrie discrète en analyse d'images**, Jean-Marc Chassery et Annick Montanvert, Ed. Hermès, ISBN 2-86601-271-2, 1991. Attention : non disponible chez l'éditeur mais on peut le trouver dans les laboratoires ou bibliothèques universitaires.
- **Digital Geometry, geometric methods for digital picture analysis**, R. Klette, A. Rosenfeld, Ed. Morgan Kaufman, ISBN 1 - 55860 - 861 - 3, 2004
- **Géométrie discrète et images numériques**, D. Coeurjolly, A. Montanvert, and JM. Chassery, editors. Hermès, A paraître en 2007.

2 Deux articles de synthèse sur les droites et plans discrets

- Valentin Brimkov, David Coeurjolly, Reinhard Klette: **Digital planarity - A review**. Discrete Applied Mathematics 155(4): 468-495 (2007)
- Reinhard Klette, Azriel Rosenfeld: **Digital straightness - a review**. Discrete Applied Mathematics 139(1-3): 197-230 (2004)