

Modélisation et Reconnaissance des formes

Epreuve correspondant au cours de Marie-Odile Berger

Note : j'attends de vous des réponses précises et argumentées aux questions posées.

1 Covariance

On considère une variable aléatoire $Z = (X, Y)$ qui suit une loi normale de moyenne $(1, 2)$ et de matrice de covariance $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Calculer la matrice de covariance de la variable aléatoire AX .
2. En utilisant la propagation linéaire d'erreur, calculer une valeur approchée de la covariance de la variable aléatoire $T = Y/X$.
3. On souhaite maintenant utiliser une méthode par échantillonnage pour calculer la covariance de T . Expliquer le principe d'une telle méthode (aucun calcul n'est demandé). Quels sont les avantages et les inconvénients d'une méthode par échantillonnage par rapport à la propagation linéaire?

2 Analyse en composantes principales (ACP)

2.1 Généralités sur l'ACP

Répondre OUI ou NON à chacun des items proposés ci-dessous et justifier votre réponse.

1. l'analyse en composantes principales est une méthode de réduction de la dimensionnalité
2. le critère permettant de calculer les composantes principales est de nature probabiliste
3. l'ACP n'est pas sensible à la présence de données aberrantes.
4. l'ACP vise à trouver une base permettant de mieux exprimer les données.
5. les composantes principales sont indépendantes

2.2 Utilisation de l'ACP pour la reconnaissance

Vous avez étudié lors du second TP la reconnaissance de visages par les *eigenfaces*. En pratique, il s'avère que le taux de reconnaissance d'un visage dépend fortement de la variation de l'échelle du visage entre les données d'apprentissage et la donnée test. La présence d'un arrière plan plus visible est aussi une source d'erreur ainsi que l'orientation du visage. Des exemples de la base d'apprentissage sont montrés en première ligne de fig. 1 tandis que des images tests présentant de telles variations sont montrées sur la deuxième ligne.

Proposer et justifier diverses stratégies permettant de diminuer l'impact de ces variations d'échelle, d'arrière plan ou d'orientation dans la reconnaissance. Vos propositions pourront aussi bien concerner la phase d'apprentissage que la phase de reconnaissance.

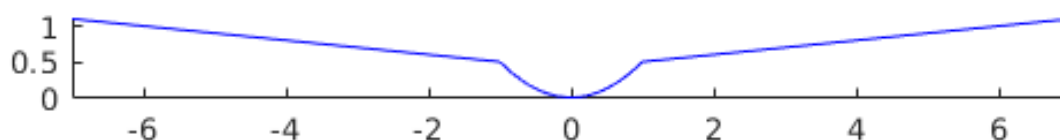
3 Estimation robuste RANSAC et ses variantes

On s'intéresse ici aux algorithmes d'estimation robuste. Bien que les questions soient d'ordre général, vous pouvez, pour fixer les idées, considérer le problème de l'estimation d'une droite à partir d'un nuage de n points. Le paramètre $p = (a, b)$ est la droite à estimer et $r_i(p) = |y_i - ax_i + b|$ est le résidu associé à chaque mesure (x_i, y_i) .

1. le principe des M-Estimeurs est de trouver le paramètre p minimisant non pas $\sum_{i=1}^n r_i^2(p)$ mais $\sum_{i=1}^n \rho(r_i^2(p))$ avec une fonction ρ bien choisie. Expliquer le rôle de cette fonction ρ . On considère la fonction ρ dont le graphe est donné ci-dessous. Cette fonction pourrait-elle être utilisée pour construire un M-estimateur? pourquoi?



FIGURE 1 – première ligne : exemples de visages utilisés pour l'apprentissage. Deuxième lignes : exemple d'images tests.



2. La deuxième classe de méthodes vue en cours pour prendre en compte des données aberrantes est de type RANSAC. Cet algorithme itère deux étapes : (i) génération d'hypothèses de paramètres à partir d'un nombre minimal de points (ii) calcul de l'ensemble de consensus, c'est-à-dire des points compatibles avec cette hypothèse. L'hypothèse générant le plus grand ensemble de consensus est retenue. On cherche dans cette question à comparer les deux types d'algorithmes robustes que sont les M-estimateurs et RANSAC.
 - Expliquer pourquoi RANSAC est plus robuste que les M-estimateurs en cas de grand nombre d'outliers. Peut-on trouver des solutions avec RANSAC lorsque le taux d'outliers est supérieur à 50% ?
 - Complexité : on note T_G le temps nécessaire pour générer une hypothèse (par exemple une droite à partir de deux points) et T_E le temps nécessaire pour tester si une mesure satisfait l'hypothèse (si un point est proche de la droite estimée). Si t est le nombre d'hypothèses générées et n le nombre de points considérés, quelle est le temps nécessaire à la mise en oeuvre de RANSAC ? Par comparaison, de quoi dépend la complexité en temps d'un algorithme de type M-estimateur ?
 - En cas de convergence des deux algorithmes, lequel des deux algorithmes M-estimateur ou RANSAC est le plus précis ?
 - Laquelle des deux méthodes se comporte le mieux s'il y a non pas une droite, mais plusieurs droites présentes dans l'ensemble de points ?
3. Le point de rupture d'un estimateur est la proportion d'observations incorrectes qu'un estimateur peut supporter sans être affecté par la présence de données aberrantes (outliers). Expliquer pourquoi le point de rupture de l'estimateur moyenne est 0. Quel est le point de rupture de l'estimateur médiane ? Soit h un entier naturel. On considère l'estimateur suivant d'une grandeur p : $\hat{p}_h = \sum_{i=1}^h r_i(p)$ où les résidus $r_i(p)$ sont ordonnés par valeurs croissantes. Quel est le point de rupture de cet estimateur ?