Simplification des terrains basée sur la triangulation de Delaunay

Pascal J. FREY † and Houman BOROUCHAKI ‡
† INRIA, Projet GAMMA, F-78153 Le Chesnay cedex
‡ GSM-LASMIS, UTT, F-10010 Troyes cedex

Sujet

- carte géographique :
  grille régulière ou triangulation dense (ex : 1024×1024)
  ? stockage, transfert, calcul, ...
  $\Rightarrow$ simplification.
- plusieurs méthodes proposées [1]
  $\neq$ critères de mesure de la déviation entre T et T_s.

Problème

- $\mathcal{T}$: triangulation *canonique* d'une carte
  sommets = nœuds de $\mathcal{G}$, grille régulière $n \times m$ de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{R}^3$,
- trouver $\mathcal{T}_s$ s'appuyant sur un sous-ensemble "minimal" $\mathcal{V}$ des sommets de $\mathcal{T}$ dont l'écart à la carte $\mathcal{T}$ est inférieur ou égal à un seuil donné.
- quantifier cet écart.

Solution

- mesure continue : distance de Hausdorff,
- mesure discrète : écart entre les sommets de la carte $\mathcal{T}$ et leur projection orthogonale sur la triangulation $\mathcal{T}_s$

References

[1] P.S. Heckbert and M. Garland, 1997, Survey of Polygonal Surface Simplification Algorithms, Research Report, CMU-CS-97.

1 Position du problème

Hypothèses

Soient :

- $z(p)$ cote d'un nœud p de $\mathcal{G}$
- $u_{\mathcal{T}}$ le vecteur de dimension $n \times m$ de composante $z(p)$,
- $v_{\mathcal{T},\mathcal{T}_s}$ le vecteur de dimension $n \times m$ de composante $z_s(p)$,
  cotes des projections orthogonales de $P = (p, z(p))$ de $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{T}_s$.

Problème

Trouver :

- $\mathcal{W}$ sous-ensemble de cardinal minimal des nœuds de $\mathcal{G}$ et
- $\mathcal{T}_s$ s'appuyant sur les sommets images des nœuds de $\mathcal{W}$ t.q.

$$\delta_{\mathcal{T}_s} = \|u_{\mathcal{T}} - v_{\mathcal{T},\mathcal{T}_s}\| \leq \delta$$

(où $\| \cdot \|$ désigne une norme de $\mathbb{R}^3$).

Remarque(s)

- si $\mathcal{W}$ est connu, alors la **triangulation de Delaunay** des nœuds de $\mathcal{W}$ dans $\mathbb{R}^2$ est celle de *rugosité minimale* [1].
  $\Rightarrow$ trouver ces nœuds.
- problème NP-complet (combinatoire).

Heuristique

- mesure de la déformation locale d'une triangulation de surface,
- construction de $\mathcal{W}$,
- algorithme incrémental de simplification.

References

[1] S. Rippa, 1990, Minimal roughness property of the Delaunay triangulation, Computer Aided Geometric Design, 7, p. 489-497.

2 Déformation locale

Caractérisation

- Cas général :
  déformation en P de Σ quantifiée par mesure de la courbure, représente localement la déviation par rapport à $\Pi(P)$.

- Surfaces discrètes :
  déformation en P écart maximal des sommets adjacents à $\Pi(P)$.

$$\varepsilon(P) = \max_i d(P_i, \Pi(P)) \, ,$$

  $d(.,.)$ désigne la distance d'un point à un plan.

- $\widetilde{\Pi}(\bigcup_i \{P_i\})$: plan moyen passant par les P_i alors :

$$d(P, \widetilde{\Pi}(\bigcup_i \{P_i\})) \leq \varepsilon(P) \, .$$

Mesure

Soient $\mathcal{B}(P)$ la *boule* de P et $\mathcal{C}(P)$ triangulation s'appuyant sur le contour polygonal de $\mathcal{B}(P)$ (cavité associée à P).

- écart de P à $\widetilde{\Pi}(P)$ représente une approximation de l'écart entre la triangulation $\mathcal{B}(P)$ et $\mathcal{C}(P)$.

- $\varepsilon(P)$ permet de quantifier localement l'écart entre $\mathcal{T}$ (contenant P) et la triangulation

$$\mathcal{T}_s(P) = \mathcal{T} - \mathcal{B}(P) + \mathcal{C}(P)$$

  triangulation des sommets de $\mathcal{T}$ privée de P.

- donc $\varepsilon(P)$ est une mesure discrète représentant la déformation maximale au voisinage de P.

Alternative

- $\bar{\varepsilon}(P)$, moyenne des déformations au voisinage de P :

$$\bar{\varepsilon}(P) = \int_{p_\pi(\mathcal{B}(P))} d(Q, \Pi(P)) d\omega \; / \int_{p_\pi(\mathcal{B}(P))} d\omega \, ,$$

  où Q est l'image des points parcourant $p_\pi(\mathcal{B}(P))$ sur $\mathcal{B}(P)$, $d\omega$ est l'élément de surface et p_π la projection dans le plan tangent $\Pi(P)$.

3 Schéma général

Approche

- Problème de simplification NP-complet.
- $\rightarrow$ approche incrémentale :
  - à chaque itération l'écart local entre $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_{i+1}$ est minimisé,
  - le sommet de déformation locale minimale est supprimé.
- Limitations :
  Cette approche ne permet pas de garantir que la triangulation finale corresponde à la triangulation d'écart globalement minimal par rapport à la triangulation initiale :
  suppression de P modifie la déformation locale des sommets adjacents à $P \Rightarrow$ nouvelles déformations locales à calculer (inconnues avant la suppression de P).

Schéma

- Construction de $\mathcal{T}_s$ par suppression itérative des P_i.
  ($\neq$ méthodes d'insertion incrémentales *greedy algorithms* [1]).
- à chaque itération :
  - identifier P, sommet à supprimer : $\varepsilon(P)$ minimale.
  - éliminer $\mathcal{B}(P)$,
  - retrianguler $\mathcal{C}(P)$ selon le critère de Delaunay
  - mettre à jour les $\varepsilon(P_i)$, $P_i \in \mathcal{C}(P)$.
- tant que $\varepsilon(P) < \delta$, $\forall P \in \mathcal{T}$.

Remarque(s)

- efficacité : queue de priorité (*heap*), caractère local des opérations (bascules arête)
- fixer *a priori* le nombre de sommets de $\mathcal{T}_s$.

References

[1] M. Garland and P.S. Heckbert, 1995, Fast Polygonal Approximation of Terrains and height Fields Research Report, CMU-CS-95-181.

4 Suppression d'un sommet

Principe

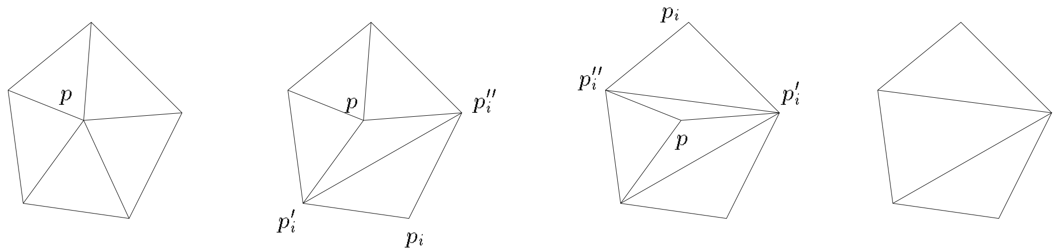
- opération locale : suppression d'un sommet.
- $\mathcal{T}_s(P) = \mathcal{T} - \mathcal{B}(P) + C(P)$
  éliminer $K_i \in \mathcal{B}(P)$ et trianguler $\mathcal{C}(P)$.
- triangulation $\mathcal{C}(P)$ *a priori* quelconque, peut être construite comme image de la triangulation $\mathcal{C}(p)$ dans $\mathbb{R}^2$.
  La **triangulation de Delaunay** est de *rugosité* minimale.
  Pour une triangulation T de $\mathbb{R}^2$, la rugosité de son image suivant une fonction cartésienne z appliquée aux nœuds, peut être définie comme :

$$\|z\|^2_{T,1} = \sum_{K \in T} \int_K \|\nabla z(p)\|^2 d\omega \,,$$

  au sens de la semi-norme de Sobolev $\| \,.\, \|_{T,1}$.
- triangulation de Delaunay de $\mathcal{C}(p)$: suppression itérative des arêtes de $\mathcal{B}(p)$ incidentes à p, $\rightarrow$ bascules arêtes.

Algorithme

- tant que $Card(\mathcal{B}(p)) > 3$ faire
  - choisir une arête pp_i commune aux deux triangles $pp'_ip''_i$ et $pp_ip"_i$
  - si le cercle circonscrit à $p'_ip_ip''_i$ ne contient strictement aucun nœud de $\mathcal{B}(p)$ différent de p, alors basculer l'arête pp_i (*i.e.*, échanger les paires de triangles $pp'_ip''_i$ et $pp_ip''_i$ par $pp'_ip''_i$ et $p'_ip_ip''_i$), et mettre à jour $\mathcal{B}(p)$.
- remplacer les 3 triangles de $\mathcal{B}(p)$ par un seul triangle ne contenant pas p comme sommet (dans certains cas, $\mathcal{B}(p)$ est réduit à 2 (nœud frontalier) ou à 4 (configuration dégénérée) triangles).



5 Exemples

Résultats

- Méthode implémentée et testée sur de nombreuses cartes.
- Temps cpu : HP9000-PA8600 552Mhz.

cartes	np	nt	δ	$\tau\%$	Mbytes	$cpu(sec.)$
ashby	156 392	311 190	-	-	-	-
346×452	6 813	16 085	2	96.64	16	6.7
	47 646	99 613	0.4	69.5	16	5.5
grand canyon	1 442 401	2 880 000	-	-	-	-
$1\,024 \times 1\,024$	41 793	97 072	100	97.1	152	74
	100 000	199 736	106.3	93.5	152	71.5
westUS	1 442 401	2 880 000	-	-	-	-
$1\,024 \times 1\,024$	236 184	499 342	1.5	77.48	110	45.6
	5 747	13 370	25	99.45	110	55.4
ntc	1 442 401	2 880 000	-	-	-	-
$1\,024 \times 1\,024$	139 639	299 339	0.6	86.6	110	47.
	3 064	7 257	10	99.7	110	52.5

Extensions

Contrôle au premier ordre d'une surface discrète quelconque.

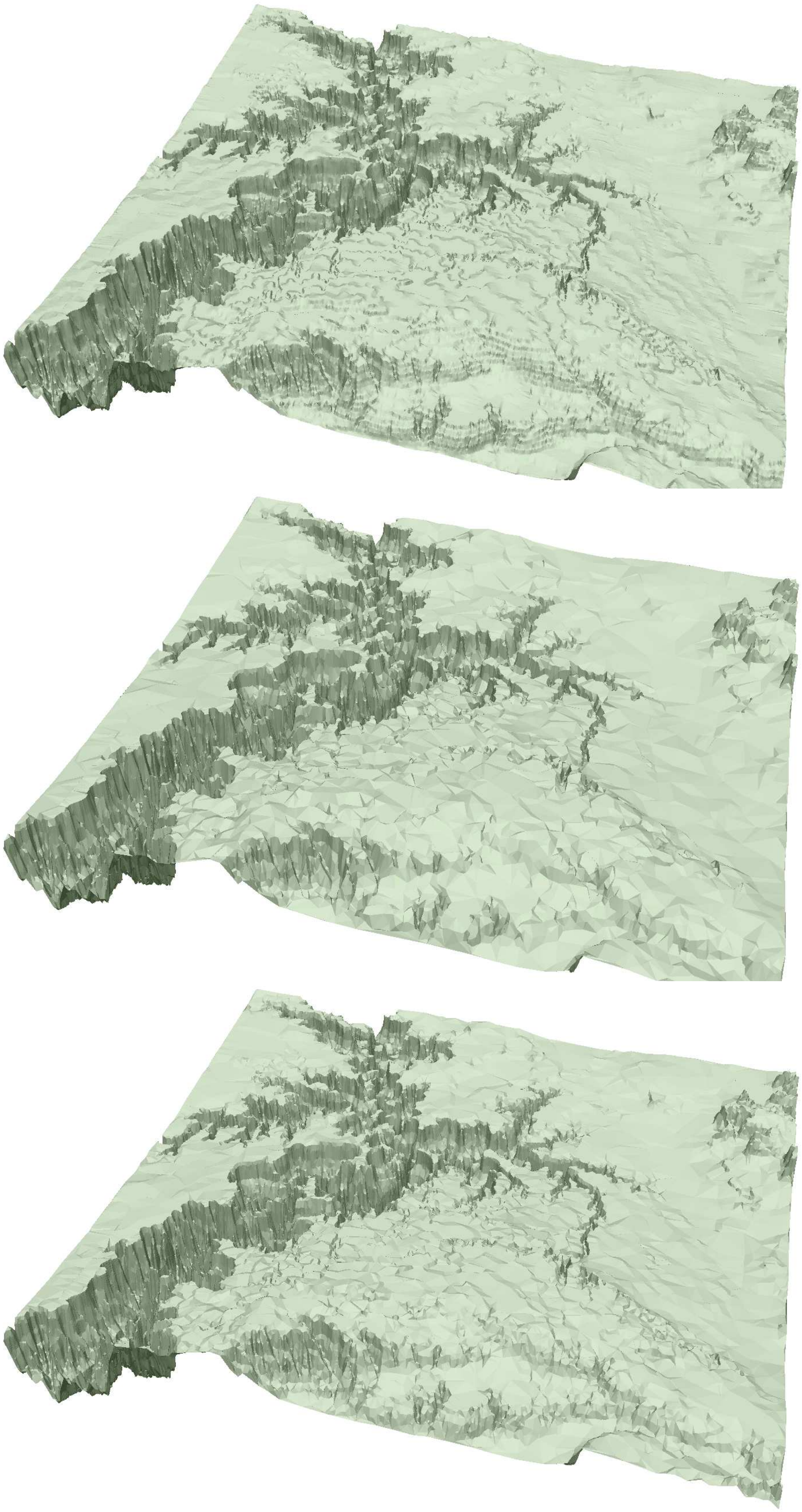


Figure 1: Grand Canyon, USA *: triangulation initiale de la carte* $1\,201 \times 1\,201$, $1\,442\,401$ *points et* $2\,880\,000$ *triangles (haut), triangulation simplifiée de la carte* ($41\,793$ *points et* $97\,072$ *triangles) pour* $\delta = 100$ *(milieu) et triangulation simplifiée de la carte* ($100\,000$ *points)* $\delta = 106.3$ *(bas).*

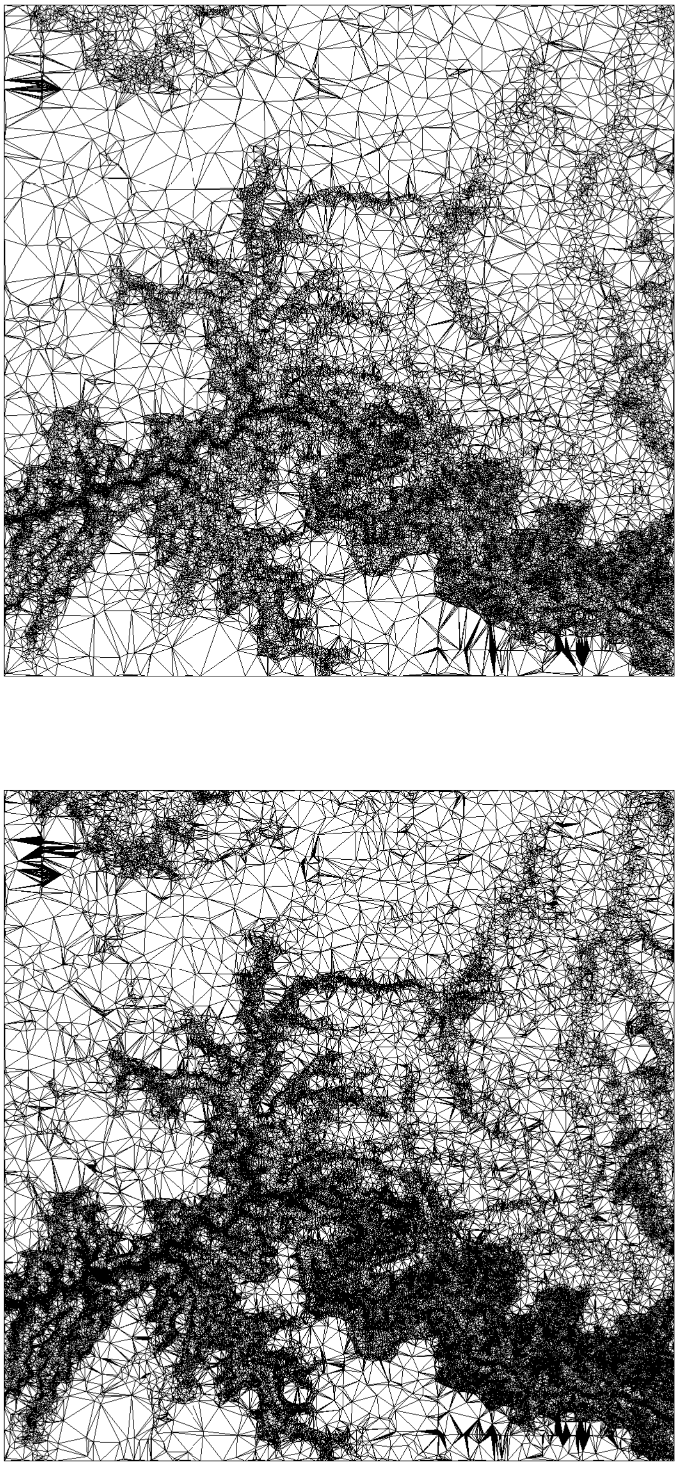


Figure 2: Grand Canyon, USA *: triangulations de Delaunay simplifiées : pour* $\delta = 100$ *(haut) et pour* $np = 100\,000$*,* $\delta = 106.3$ *(bas).*

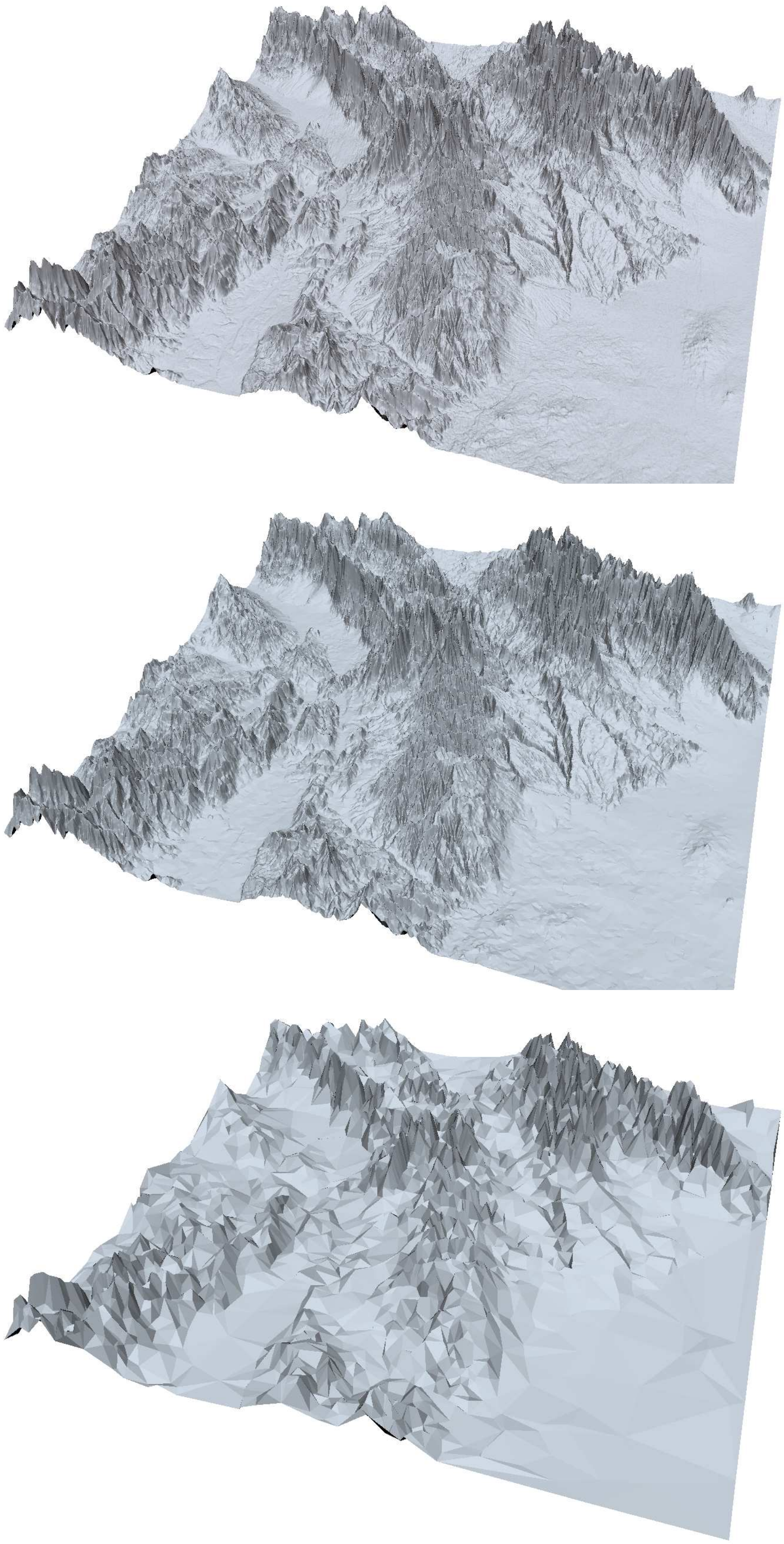
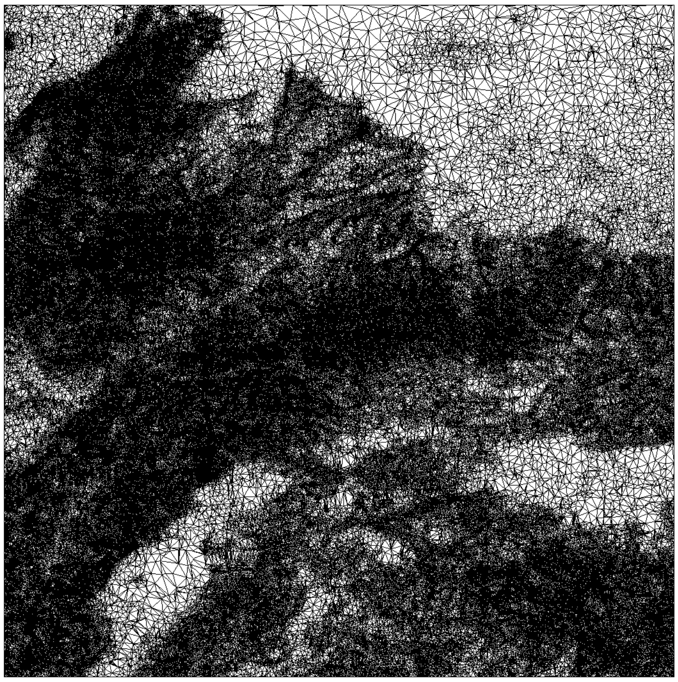


Figure 3: West US *: triangulation initiale de la carte* $1\,201 \times 1\,201$, $1\,442\,401$ *points et* $2\,880\,000$ *triangles (haut), triangulation simplifiée de la carte (*$236\,184$ *points et* $499,342$ *triangles) pour* $\delta = 1.5$ *(milieu) et triangulation simplifiée de la carte (*$5\,747$ *points et* $13\,370$ *triangles) pour* $\delta = 25$ *(bas).*



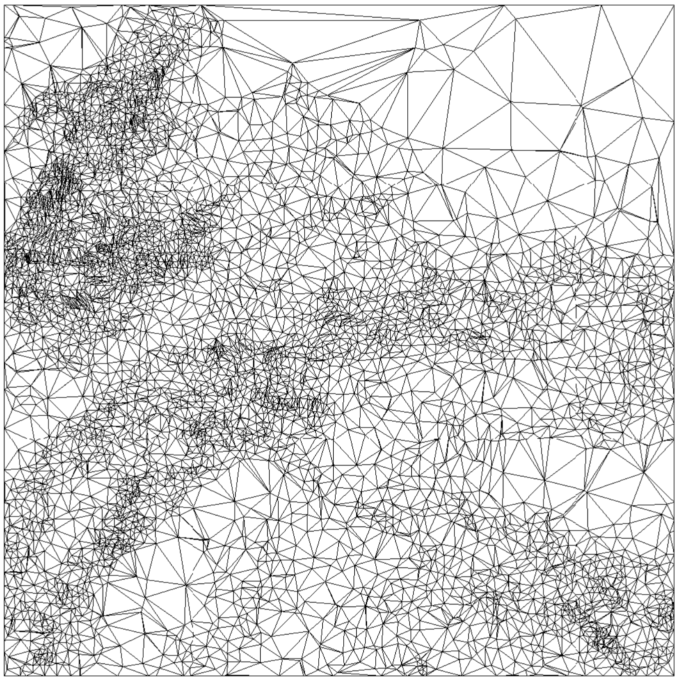


Figure 4: West US *: triangulations de Delaunay simplifiées : pour* $\delta = 1.5$ *(haut) et pour* $\delta = 25$ *(bas).*