

# Éléments de Géométrie Discrète Vers une Etude des Structures Discrètes Bruitées

**Soutenance d'habilitation à diriger des recherches**

Isabelle DEBLED-RENNESON



## Parcours

Recherche

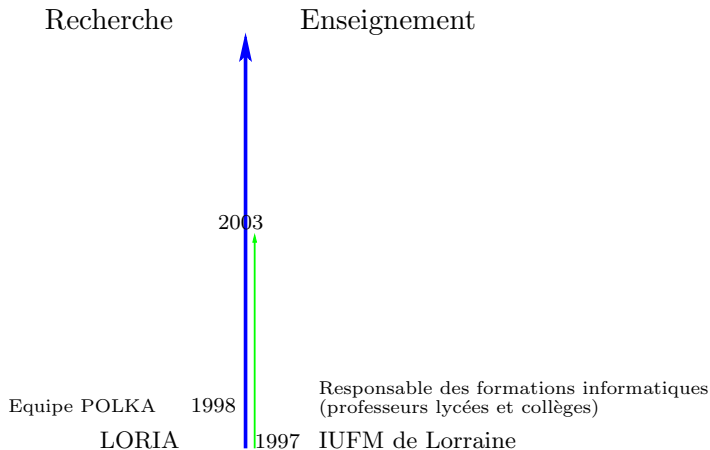
Enseignement

LORIA

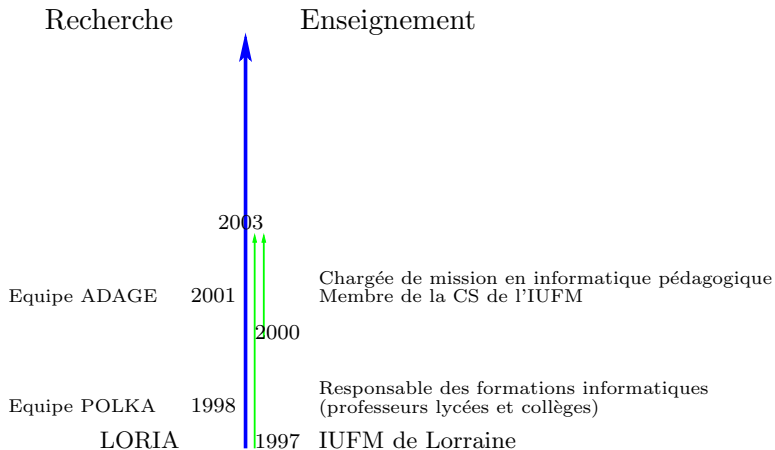


1997 IUFM de Lorraine

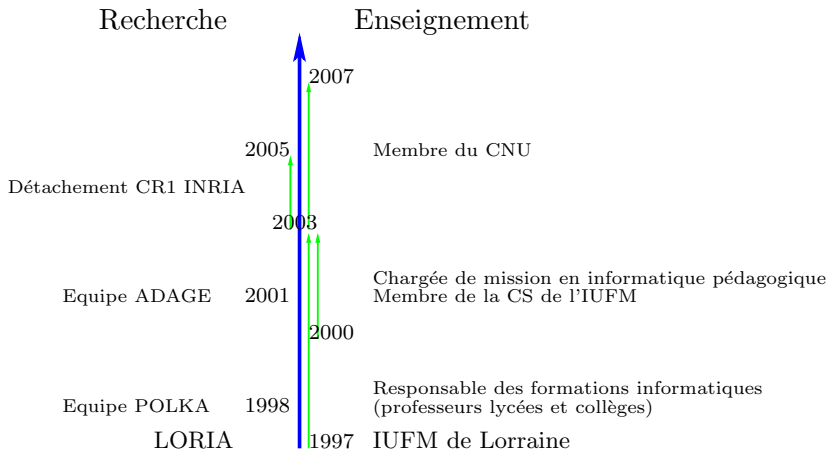
## Parcours



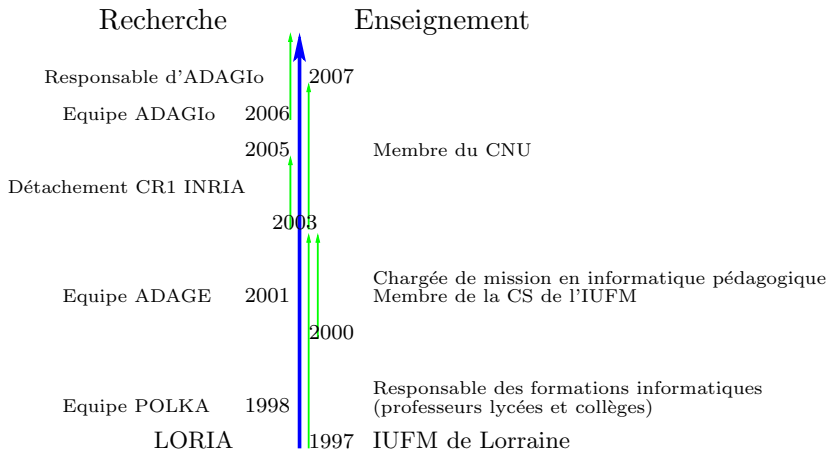
## Parcours



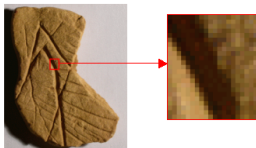
## Parcours



## Parcours



## Géométrie Discrète



Appareils photos numériques

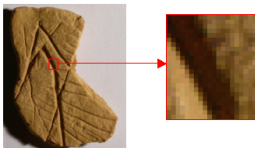
Scanners

IRM médicaux

...

⇒ Données discrètes

## Géométrie Discrète



Appareils photos numériques

Scanners

IRM médicaux

...

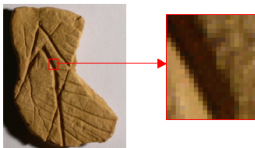
⇒ Données discrètes

### Interprétation et traitement des données :

- Plongement des données dans un espace continu
  - Utilisation de méthodes d'approximation puis de méthodes paramétriques
- Définition des objets discrets sous-jacents au problème
  - Utilisation des propriétés de ces objets



## Géométrie Discrète



Appareils photos numériques

Scanners

IRM médicaux

...

⇒ Données discrètes

### Interprétation et traitement des données :

- Plongement des données dans un espace continu
  - Utilisation de méthodes d'approximation puis de méthodes paramétriques
- Définition des objets discrets sous-jacents au problème
  - Utilisation des propriétés de ces objets

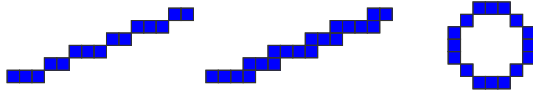
## Géométrie Discrète

Années 70 : A. Rosenfeld, G. Herman, E. Khalimsky

**Objectif** : Définir un cadre théorique pour transposer dans  $\mathbb{Z}^n$  les bases de la géométrie euclidienne

# Géométrie Discrète

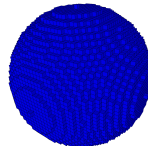
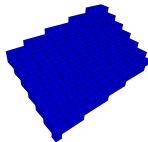
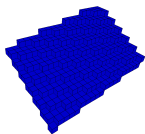
Thèmes d'étude



- Définitions et études de nouvelles classes d'objets discrets

# Géométrie Discrète

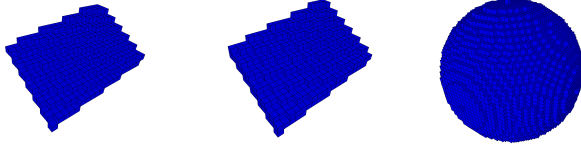
Thèmes d'étude



- Définitions et études de nouvelles classes d'objets discrets

# Géométrie Discrète

Thèmes d'étude



- Définitions et études de nouvelles classes d'objets discrets
- Reconnaissance analytique de structures discrètes

# Géométrie Discrète

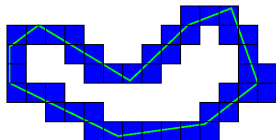
Thèmes d'étude



- Définitions et études de nouvelles classes d'objets discrets
- Reconnaissance analytique de structures discrètes
- Extraction de paramètres géométriques sur des structures discrètes

# Géométrie Discrète

Thèmes d'étude



- Définitions et études de nouvelles classes d'objets discrets
- Reconnaissance analytique de structures discrètes
- Extraction de paramètres géométriques sur des structures discrètes
- Reconstruction analytique

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Plan

- 1 Structures discrètes régulières**
  - Convexité discrète
  - Reconnaissance
  - Paraboles
- 2 Courbes bruitées**
  - Segments flous
  - Segmentation
  - Estimateurs
- 3 Surfaces bruitées**
  - Morceaux flous de plans discrets
  - Caractéristiques
  - Segmentation
- 4 Conclusion**

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Plan

- 1 Structures discrètes régulières**
  - Convexité discrète
  - Reconnaissance
  - Paraboles
- 2 Courbes bruitées**
  - Segments flous
  - Segmentation
  - Estimateurs
- 3 Surfaces bruitées**
  - Morceaux flous de plans discrets
  - Caractéristiques
  - Segmentation
- 4 Conclusion**



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

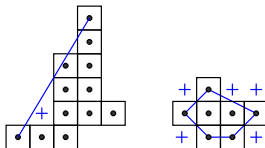
Conclusion

# Détection de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Avec Jocelyne Rouyer et Jean-Luc Rémy

## Convexité discrète (C.E. Kim, A. Rosenfeld 82)

Un objet discret  $O$  est **convexe** ssi son enveloppe convexe euclidienne ne contient pas de point entier du complémentaire de  $O$ .

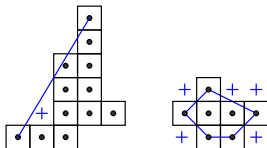


# Détection de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Avec Jocelyne Rouyer et Jean-Luc Rémy

## Convexité discrète (C.E. Kim, A. Rosenfeld 82)

Un objet discret  $O$  est **convexe** ssi son enveloppe convexe euclidienne ne contient pas de point entier du complémentaire de  $O$ .



## Droite discrète arithmétique

**Droite discrète arithmétique** (J-P Réveilles 91),  $\mathcal{D}(a, b, \mu, b)$ , de vecteur directeur  $(b, a)$ , de borne inférieure  $\mu$  et d'épaisseur arithmétique  $\omega$  :

$$(x, y) \in \mathbb{Z}^2, \quad \mu \leq ax - by < \mu + \omega$$

- **Droite naïve** :  $\omega = \max(|a|, |b|)$
- **Droites d'appui** : droites réelles  $ax - by = \mu$  et  $ax - by = \mu + \omega - 1$

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Principe de l'algorithme

## Algorithme linéaire

- ▷ Propriété arithmétique de l'enveloppe convexe d'un segment de droite naïve
- ▷ Variante de l'algorithme incrémental de reconnaissance des segments de droites naïves  
(I. Debled-Rennesson, J-P Réveilles 95)

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

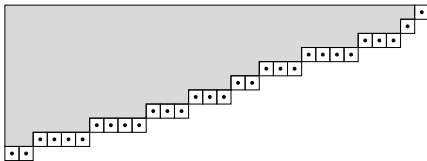
Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme



I. DEBLED-RENNESON, J-L. REMY, J. ROUYER-DEGLI

*Detection of the discrete convexity of the polyominoes*, DAM 2003 et DGCI 2000..

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

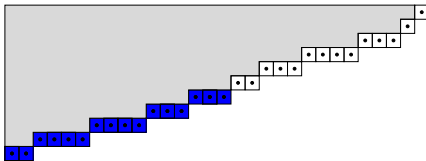
Morceaux flous  
de plans  
discrètes

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme

- Parcours et reconnaissance incrémentale des segments de droites discrètes naïves



I. DEBLED-RENNESON, J-L. REMY, J. ROUYER-DEGLI

*Detection of the discrete convexity of the polyominoes*, DAM 2003 et DGCI 2000..

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

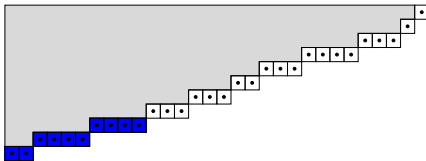
Morceaux flous  
de plans  
discrètes

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme

- Parcours et reconnaissance incrémentale des segments de droites discrètes naïves
- Reprise de la reconnaissance sur le dernier point d'appui inférieur du segment courant



I. DEBLED-RENNESON, J-L. REMY, J. ROUYER-DEGLI

*Detection of the discrete convexity of the polyominoes*, DAM 2003 et DGCI 2000..

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

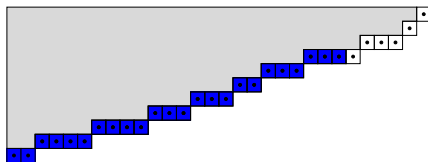
Morceaux fous  
de plans  
discrètes

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme

- Parcours et reconnaissance incrémentale des segments de droites discrètes naïves
- Reprise de la reconnaissance sur le dernier point d'appui inférieur du segment courant

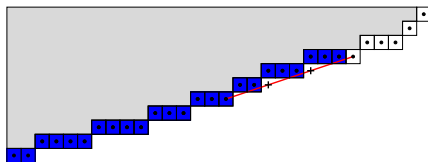


I. DEBLE-RENNESON, J-L. REMY, J. ROUYER-DEGLI

*Detection of the discrete convexity of the polyominoes*, DAM 2003 et DGCI 2000..

# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

## Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme

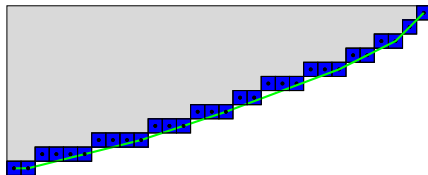
- Parcours et reconnaissance incrémentale des segments de droites discrètes naïves
- Reprise de la reconnaissance sur le dernier point d'appui inférieur du segment courant
- **Non convexité** si le dernier point testé ne peut être ajouté au segment courant et allonge un palier





# Détection linéaire de la convexité discrète du bord d'un objet discret

## Principe de l'algorithme



## Principe de l'algorithme

- Parcours et reconnaissance incrémentale des segments de droites discrètes naïves
- Reprise de la reconnaissance sur le dernier point d'appui inférieur du segment courant
- **Non convexité** si le dernier point testé ne peut être ajouté au segment courant et allonge un palier
- **Convexité** si la courbe est entièrement parcourue  
**Enveloppe convexe inférieure du bord** = union des enveloppes convexes inférieures des segments obtenus



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Avec Hélène Dörksen-Reiter

## Objectifs

- Polygonalisation *réversible*
- Respect des *convexités/concavités* de la courbe discrète
- Sommets *entiers*

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

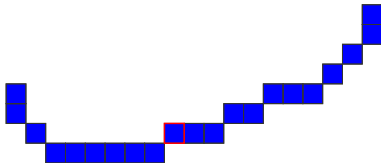
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Segments fondamentaux d'une courbe discrète

## Segment fondamental d'une courbe discrète

Soit  $C$  une courbe discrète, un **segment** de droite discrète est dit **fondamental** (ou maximal) si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur  $C$  en restant un segment de droite discrète naïve.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

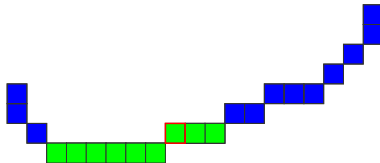
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Segments fondamentaux d'une courbe discrète

## Segment fondamental d'une courbe discrète

Soit  $C$  une courbe discrète, un **segment** de droite discrète est dit **fondamental** (ou maximal) si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur  $C$  en restant un segment de droite discrète naïve.





Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

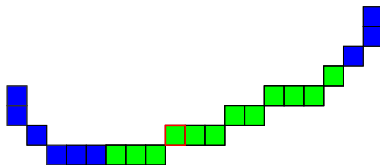
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Segments fondamentaux d'une courbe discrète

## Segment fondamental d'une courbe discrète

Soit  $C$  une courbe discrète, un **segment** de droite discrète est dit **fondamental** (ou maximal) si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur  $C$  en restant un segment de droite discrète naïve.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

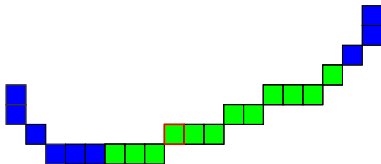
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Segments fondamentaux d'une courbe discrète

## Segment fondamental d'une courbe discrète

Soit  $C$  une courbe discrète, un **segment** de droite discrète est dit **fondamental** (ou maximal) si il ne peut pas être étendu à droite ou à gauche sur  $C$  en restant un segment de droite discrète naïve.



Algorithme de calcul des segments fondamentaux d'une courbe de  $n$  points  
complexité  $O(n)$  (F. Feschet, L. Tougne 99)

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

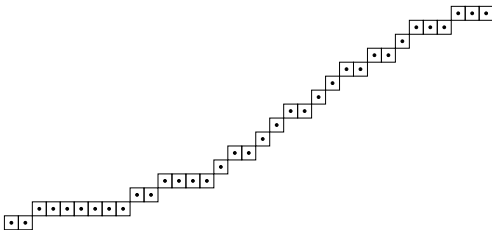
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une **8-courbe**  $C$  du bord de  $O$  est dite **convexe** (resp. **concave**) si les segments fondamentaux de  $C$  ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).





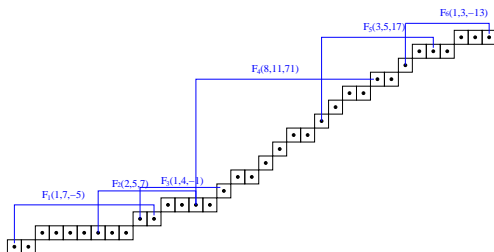
# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une **8-courbe**  $C$  du bord de  $O$  est dite **convexe** (resp. **concave**) si les segments fondamentaux de  $C$  ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).

$C$  est **convexe**  $\Leftrightarrow$  il n'y a pas de point entier entre  $C$  et son enveloppe convexe inférieure.



$p_1 = 0.14 < p_2 = 0.4$ , portion  
maximale convexe  
 $p_2 = 0.4 > p_3 = 0.25$ , portion  
maximale concave  
 $p_3 = 0.25 < p_4 = 0.72$ , portion  
maximale convexe  
 $p_4 = 0.72 > p_5 = 0.6 > p_6 =$   
 $0.33$ , portion maximale concave

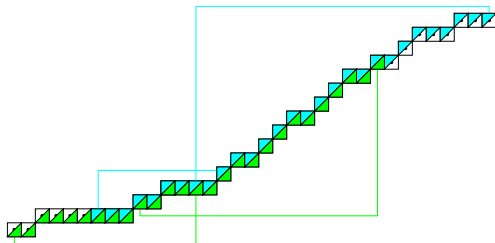
# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Courbe du bord et convexité

Dans le premier octant, une **8-courbe**  $C$  du bord de  $O$  est dite **convexe** (resp. **concave**) si les segments fondamentaux de  $C$  ont des pentes strictement croissantes (resp. décroissantes).

$C$  est **convexe**  $\Leftrightarrow$  il n'y a pas de point entier entre  $C$  et son enveloppe convexe inférieure.



$p_1 = 0.14 < p_2 = 0.4$ , portion maximale convexe

$p_2 = 0.4 > p_3 = 0.25$ , portion maximale concave

$p_3 = 0.25 < p_4 = 0.72$ , portion maximale convexe

$p_4 = 0.72 > p_5 = 0.6 > p_6 = 0.33$ , portion maximale concave

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

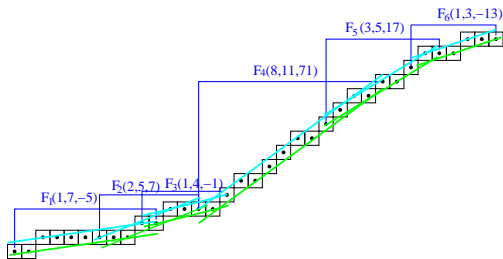
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Représentation polygonale fondamentale inférieure (resp supérieure) de $C$

Courbe polygonale dont les sommets sont les points d'intersections successifs des droites d'appui inférieures (resp. supérieures) des segments fondamentaux de  $C$ .



Décomposition suivant les droites d'appui des segments maximaux

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

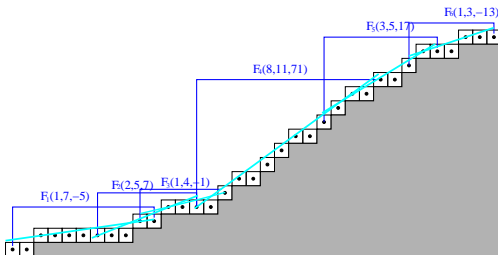
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Représentation polygonale fondamentale inférieure (resp supérieure) de $C$

Courbe polygonale dont les sommets sont les points d'intersections successifs des droites d'appui inférieures (resp. supérieures) des segments fondamentaux de  $C$ .



Respect des convexités et concavités  
de la courbe discrète

Réversibilité : la courbe discrète  
correspond à une discrétisation par  
défaut du polygone réel

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

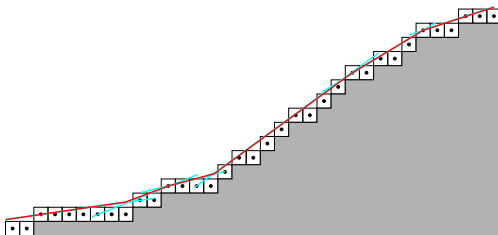
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Représentation polygonale fondamentale inférieure (resp supérieure) de $C$

Courbe polygonale dont les sommets sont les points d'intersections successifs des droites d'appui inférieures (resp. supérieures) des segments fondamentaux de  $C$ .



Respect des convexités et concavités  
de la courbe discrète

Réversibilité : la courbe discrète  
correspond à une discrétisation par  
défaut du polygone réel

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

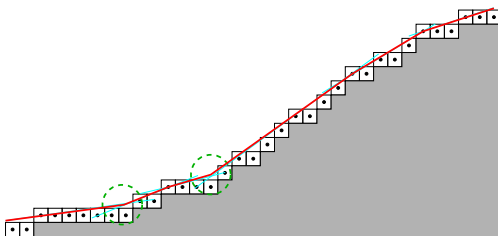
Conclusion

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Représentation polygonale fondamentale inférieure (resp supérieure) de $C$

Courbe polygonale dont les sommets sont les points d'intersections successifs des droites d'appui inférieures (resp. supérieures) des segments fondamentaux de  $C$ .



Respect des convexités et concavités  
de la courbe discrète

Réversibilité : la courbe discrète  
correspond à une discrétisation par  
défaut du polygone réel

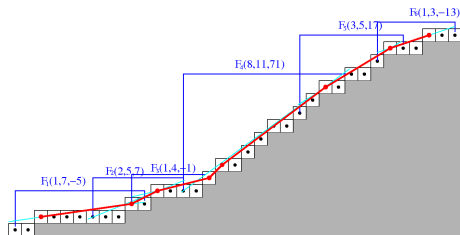
Les sommets de la polygonalisation ne  
sont pas forcément entiers

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Bilan

- Identification des situations où une décomposition polygonale
  - ▷ avec des sommets entiers,
  - ▷ réversible,
  - ▷ respectant les convexités/concavités de la courbe discrète
 n'existe pas.
- Algorithme linéaire



H. DÖRKSEN-REITER, I. DEBLED-RENNESON,

*Convex and concave parts of digital curves*, Computational Imaging and Vision, 2005.

*A Linear algorithm for polygonal representations of digital sets*, IWCI, 2006.

# Polygonalisation de courbes discrètes

Respect des convexités et concavités de la courbe discrète

## Bilan

- Identification des situations où une décomposition polygonale
  - ▷ avec des sommets entiers,
  - ▷ réversible,
  - ▷ respectant les convexités/concavités de la courbe discrèten'existe pas.
- Algorithme linéaire

## Perspectives

- Extension en dimension 3
  - ▷ Etude arithmétique de l'enveloppe convexe d'un morceau de plan discret,
  - ▷ Utilisation d'une démarche similaire pour la représentation polyédrique d'un objet discret 3D ?



H. DÖRKSEN-REITER, I. DEBLED-RENNESSON,

*Convex and concave parts of digital curves*, Computational Imaging and Vision, 2005.  
*A Linear algorithm for polygonal representations of digital sets*, IWVIA, 2006.



# Reconnaissance de morceaux de plans discrets

Avec Yan Gérard et Paul Zimmermann

## Le problème

Soit un sous-ensemble fini  $S$  de  $\mathbb{Z}^3$ , existe t-il un plan discret naïf le contenant ?

i.e. existe t-il  $(a, b, c, h) \in \mathbb{Z}^4$  tel que pour tout  $m(x, y, z)$  de  $S$ ,

$$h \leq ax + by + cz < h + \max\{|a|, |b|, |c|\}?$$

# Reconnaissance de morceaux de plans discrets

Avec Yan Gérard et Paul Zimmermann

## Le problème

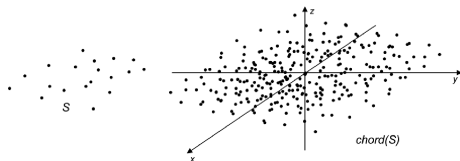
Soit un sous-ensemble fini  $S$  de  $\mathbb{Z}^3$ , existe t-il un plan discret naïf le contenant ?

i.e. existe t-il  $(a, b, c, h) \in \mathbb{Z}^4$  tel que pour tout  $m(x, y, z)$  de  $S$ ,

$$h \leq ax + by + cz < h + \max\{|a|, |b|, |c|\}?$$

## Ensemble des cordes d'un ensemble $S$

$$\text{chord}(S) = S + (-S) = \{m' - m \mid m, m' \in S\}$$



$S$ ,  $|S| = 19$ , et  $\text{chord}(S)$ .

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

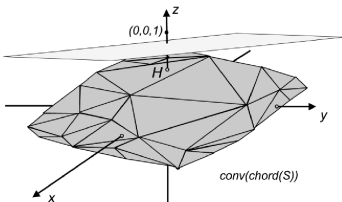
# Reconnaissance de morceaux de plans discrets

Propriétés de l'ensemble des cordes d'un morceau de plan discret

Hypothèse :  $c = \max\{|a|, |b|, |c|\}$

## Epaisseur géométrique

L'épaisseur géométrique verticale d'un ensemble fini  $S \subset \mathbb{Z}^3$  est la coordonnée en  $z$  du point du demi-axe  $Oz$  (avec  $z \geq 0$ ) appartenant à la surface de l'enveloppe convexe de  $\text{chord}(S)$ .



## Théorème (Y. Gérard 99)

Soit  $S \subset \mathbb{Z}^3$  un ensemble fini,  $S$  est un morceau de plan discret si et seulement si l'épaisseur géométrique verticale de  $S$  est strictement inférieure à 1.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrètes

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

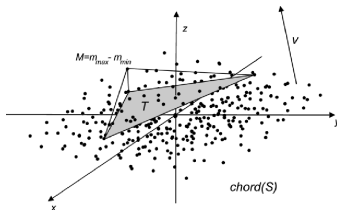
# Reconnaissance de morceaux de plans discrets

L'algorithme

## Principe

Parcours des facettes triangulaires coupant le demi-axe positif  $Oz$  de  $\text{chord}(S)$ .

Recherche à chaque étape d'un point  $M \in \text{chord}(S)$  tel que  $M.v$  soit maximal



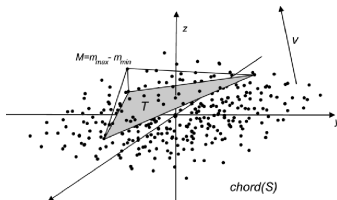
# Reconnaissance de morceaux de plans discrets

L'algorithme

## Principe

Parcours des facettes triangulaires coupant le demi-axe positif  $Oz$  de  $\text{chord}(S)$ .

Recherche à chaque étape d'un point  $M \in \text{chord}(S)$  tel que  $M.v$  soit maximal



## Bilan

- Version incrémentale
- Etude de l'optimalité des caractéristiques obtenues ( $|c|$  minimal)
- Forte complexité théorique mais bon comportement en pratique



Y. GERARD, I. DEBLED-RENNESON, P. ZIMMERMANN

*An elementary digital plane recognition algorithm*, DAM, 2005..

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Paraboles discrètes arithmétiques

Avec Eric Domenjoud et Damien Jamet

## Motivations

- Définition d'une géométrie discrète non linéaire
- Recherche de nouvelles primitives discrètes
  - ▷ Description analytique selon différents modèles

# Paraboles discrètes arithmétiques

Avec Eric Domenjoud et Damien Jamet

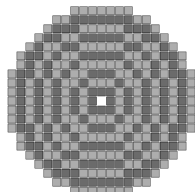
## Motivations

- Définition d'une géométrie discrète non linéaire
- Recherche de nouvelles primitives discrètes
  - ▷ Description analytique selon différents modèles

L'exemple des cercles discrets de centre  $(x_0, y_0)$

$$\left(R - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \left(R + \frac{\omega}{2}\right)^2$$

(E. Andres, 94)



$$w = 1$$

# Paraboles discrètes arithmétiques

Avec Eric Domenjoud et Damien Jamet

## Motivations

- Définition d'une géométrie discrète non linéaire
- Recherche de nouvelles primitives discrètes
  - ▷ Description analytique selon différents modèles

L'exemple des cercles discrets de centre  $(x_0, y_0)$

$$\blacksquare \left(R - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \left(R + \frac{\omega}{2}\right)^2$$

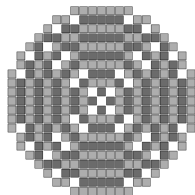
(E. Andres, 94)

$$\blacksquare -\frac{w_\alpha(x, y)}{2} \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 < \frac{w_\alpha(x, y)}{2},$$

avec  $w_\alpha(x, y) = \|(2(x - x_0), 2(y - y_0))\|_\alpha$

(C. Fiorio, D. Jamet, J-L. Toutant, 06)

- ▷ Utilisation de la norme du gradient



Cercles discrets naïfs



# Paraboles discrètes arithmétiques

Avec Eric Domenjoud et Damien Jamet

## Motivations

- Définition d'une géométrie discrète non linéaire
- Recherche de nouvelles primitives discrètes
  - ▷ Description analytique selon différents modèles

L'exemple des cercles discrets de centre  $(x_0, y_0)$

$$\blacksquare \left(R - \frac{\omega}{2}\right)^2 \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \left(R + \frac{\omega}{2}\right)^2$$

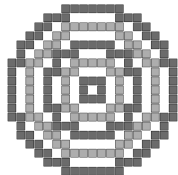
(E. Andres, 94)

$$\blacksquare -\frac{w_\alpha(x, y)}{2} \leq (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 < \frac{w_\alpha(x, y)}{2},$$

avec  $w_\alpha(x, y) = \|(2(x - x_0), 2(y - y_0))\|_\alpha$

(C. Fiorio, D. Jamet, J-L. Toutant, 06)

- ▷ Utilisation de la norme du gradient



Cercles discrets standards

# Paraboles discrètes arithmétiques

## Définition

### Définition

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré 2,

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x) - y$ ,

$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Parabole discrète arithmétique d'équation  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , d'épaisseur  $w$  :

$$\mathbb{P}(\tilde{f}, w) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \leq \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right\}$$

# Paraboles discrètes arithmétiques

## Définition

### Définition

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré 2,

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x) - y$ ,

$w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Parabole discrète arithmétique d'équation  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , d'épaisseur  $w$  :

$$\mathbb{P}(\tilde{f}, w) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \leq \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right\}$$

**Choix d'étude** :  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \|(f'(x), -1)\|_\alpha$  avec  
 $\lambda \in \mathbb{R}_+$  **facteur d'épaissement**

# Paraboles discrètes arithmétiques

## Définition

### Définition

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré 2,

$\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x) - y$ ,

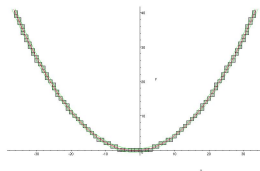
$w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Parabole discrète arithmétique d'équation  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , d'épaisseur  $w$  :

$$\mathbb{P}(\tilde{f}, w) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \leq \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right\}$$

**Choix d'étude** :  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \| (f'(x), -1) \|_\alpha$  avec  
 $\lambda \in \mathbb{R}_+$  **facteur d'épaissement**

- Parabole discrète **naïve** :  $\lambda = 1$  et  $\alpha = +\infty$



$$f(x) = \frac{1}{60}(-2x^2 - 6x + 19 - 60y),$$

$$\alpha = \infty \text{ et } \lambda = 1$$

# Paraboles discrètes arithmétiques

## Définition

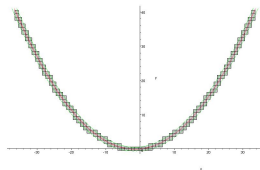
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction polynomiale de degré 2,  
 $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(x) - y$ ,  
 $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ .

Parabole discrète arithmétique d'équation  $\tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ , d'épaisseur  $w$  :

$$\mathbb{P}(\tilde{f}, w) = \left\{ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{Z}^2, -\frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \leq \tilde{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < \frac{w(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{2} \right\}$$

**Choix d'étude** :  $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda \| (f'(x), -1) \|_\alpha$  avec  
 $\lambda \in \mathbb{R}_+$  **facteur d'épaissement**

- Parabole discrète **naïve** :  $\lambda = 1$  et  $\alpha = +\infty$
- Parabole discrète **standard** :  $\lambda = 1$  et  $\alpha = 1$



$$f(x) = 1/60(-2x^2 - 6x + 19 - 60y),$$

$$\alpha = 1 \text{ et } \lambda = 1$$

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrète  
Reconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

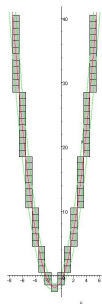
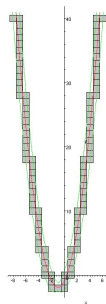
# Paraboles discrètes arithmétiques

Etude

## Connexité

- (i) **8-connexité** d'une parabole discrète arithmétique avec  $\alpha \in [1, \infty]$  et  $\lambda \in [1, +\infty[$   
 (ii) **4-connexité** si  $\alpha = 1$

$$f(x) = -x^2 - 2x + 6/7, \lambda = 1$$

 $\alpha = \infty$  $\alpha = 1$

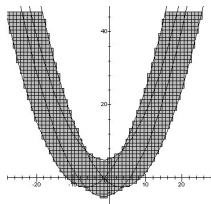
# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

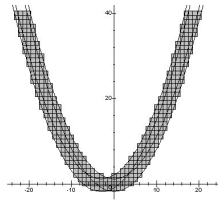
## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement

$$f(x) = 0.1x^2 + 0.3x + 0.1$$



$$\alpha = \infty, \lambda = 9$$



$$\alpha = 1, \lambda = 3$$



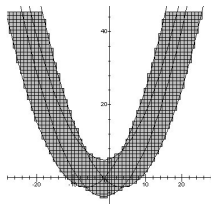
# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

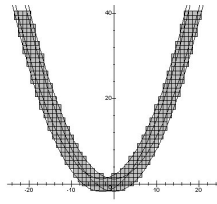
## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement
- Algorithme incrémental de construction

$$f(x) = 0.1x^2 + 0.3x + 0.1$$



$$\alpha = \infty, \lambda = 9$$



$$\alpha = 1, \lambda = 3$$





Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

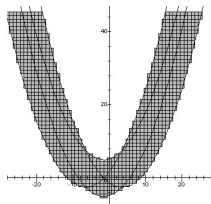
# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

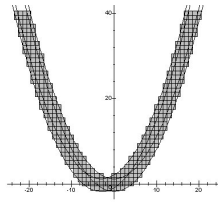
## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement
- Algorithme incrémental de construction
- Etude de la connexité

$$f(x) = 0.1x^2 + 0.3x + 0.1$$



$$\alpha = \infty, \lambda = 9$$



$$\alpha = 1, \lambda = 3$$



D. JAMET, E. DOMENJOUR, I. DEBLEDE-RENNESON

*Arithmetic discrete parabola*, ISVC, 2006.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement
- Algorithme incrémental de construction
- Etude de la connexité

## Perspectives

- Amélioration de la notion d'épaississement



D. JAMET, E. DOMENJOUR, I. DEBLED-RENNESON

*Arithmetic discrete parabola*, ISVC, 2006.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement
- Algorithme incrémental de construction
- Etude de la connexité

## Perspectives

- Amélioration de la notion d'épaississement
- Etude de la reconnaissance



D. JAMET, E. DOMENJOUR, I. DEBLE-RENNESON

*Arithmetic discrete parabola*, ISVC, 2006.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Paraboles discrètes arithmétiques

Bilan et perspectives

## Bilan

- Détection des limites de l'épaississement
- Algorithme incrémental de construction
- Etude de la connexité

## Perspectives

- Amélioration de la notion d'épaississement
- Etude de la reconnaissance
- Etude des coniques et des courbes discrètes de degrés supérieurs



D. JAMET, E. DOMENJOUR, I. DEBLED-RENNESON

*Arithmetic discrete parabola*, ISVC, 2006.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Plan

- 1 Structures discrètes régulières
  - Convexité discrète
  - Reconnaissance
  - Paraboles
- 2 Courbes bruitées
  - Segments flous
  - Segmentation
  - Estimateurs
- 3 Surfaces bruitées
  - Morceaux flous de plans discrets
  - Caractéristiques
  - Segmentation
- 4 Conclusion

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

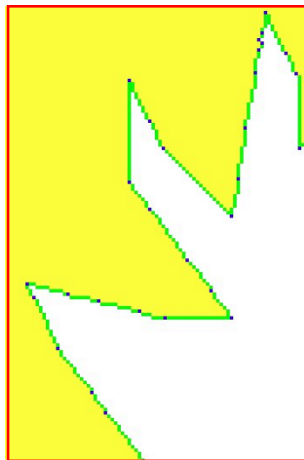
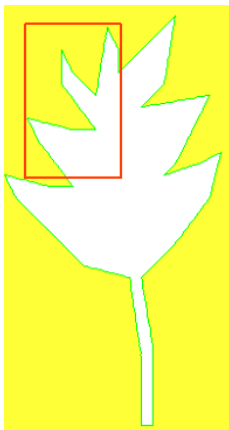
Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Limite des outils existants en géométrie discrète

Limite des algorithmes de segmentation en segments de droites discrètes naïves.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

**Segments fous**  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

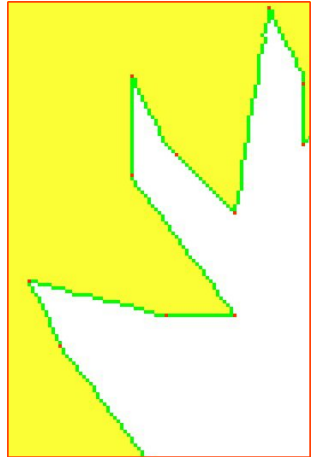
Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Objectifs

Ce que nous voulons obtenir ...



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

**Segments fous**  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

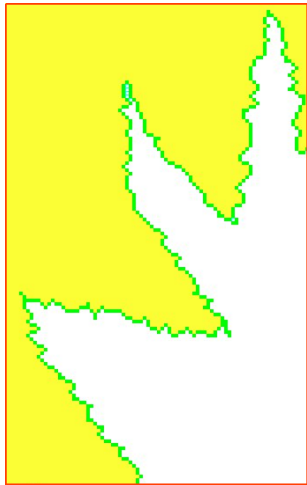
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Objectifs

Ce que nous voulons obtenir ...

- ▷ Egalement pour des courbes très bruitées





Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

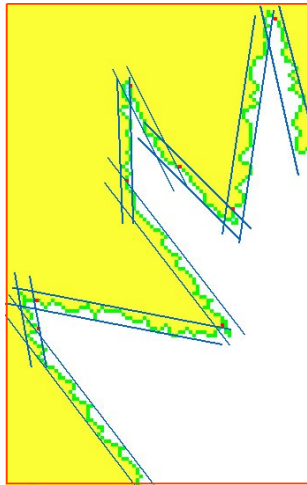
## Objectifs

Ce que nous voulons obtenir ...

- ▷ Egalement pour des courbes très bruitées

Idée générale

- ▷ Découper la courbe en droites épaisses pour une épaisseur maximale donnée

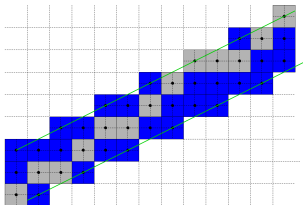


Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

Droite englobante



$\mathcal{D}(1, 2, -4, 6)$ , droite englobante de la suite de points grisés

## Droite englobante

Soit  $S_f$  une suite de points d'une courbe 8-connexe.

Une droite discrète  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  est dite **englobante** pour  $S_f$  si tous les points de  $S_f$  appartiennent à  $\mathcal{D}$ .

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

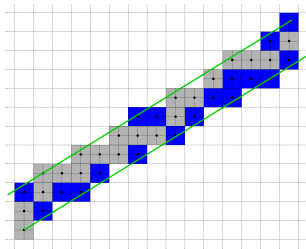
Conclusion

# Les segments fous arithmétiques

## Approche arithmétique

Avec Jocelyne Rouyer-Dégli et Jean-Luc Rémy

Hypothèse :  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  avec  $0 \leq a \leq b$  (1er octant)



### Droite strictement englobante

Soient  $Sf$  une suite de points du premier octant définie dans l'intervalle des abscisses  $[0, l - 1]$ .  $\mathcal{D}$  est dite **strictement englobante pour  $Sf$**  si,

- $\mathcal{D}$  est englobante pour  $Sf$ ,
- $\mathcal{D}$  possède au moins trois points d'appui dans l'intervalle  $[0, l - 1]$ ,
- $Sf$  contient au moins un point d'appui inférieur et un point d'appui supérieur de  $\mathcal{D}$ .

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

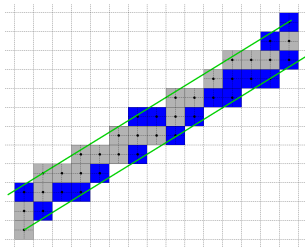
Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

## Approche arithmétique

Avec Jocelyne Rouyer-Dégli et Jean-Luc Rémy

Hypothèse :  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  avec  $0 \leq a \leq b$  (1er octant)



## Segment flou arithmétique d'ordre $d$

$Sf$  est un **segment flou d'ordre  $d$**  si et seulement si il existe une droite discrète  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  strictement englobante pour  $Sf$  telle que  $\frac{\omega}{\max(|a|, |b|)} \leq d$ .

# Les segments flous arithmétiques

## Approche arithmétique

### Algorithme de segmentation

## Segmentation

- Théorème de croissance d'un segment flou d'ordre  $d$ 
  - ▷ Etudie l'ajout d'un point  $M$  à  $Sf$ , segment flou d'ordre  $d$  avec  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  strictement englobante
  - ▷ Fournit  $\mathcal{D}'(a', b', \mu', \omega')$  strictement englobante pour  $Sf \cup \{M\}$



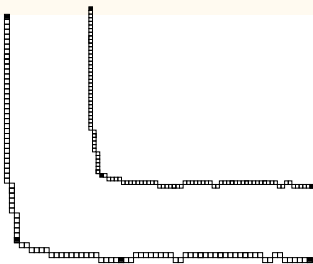
# Les segments flous arithmétiques

## Approche arithmétique

### Algorithme de segmentation

## Segmentation

- Théorème de croissance d'un segment flou d'ordre  $d$ 
  - ▷ Etudie l'ajout d'un point  $M$  à  $Sf$ , segment flou d'ordre  $d$  avec  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  strictement englobante
  - ▷ Fournit  $\mathcal{D}'(a', b', \mu', \omega')$  strictement englobante pour  $Sf \cup \{M\}$
- Algorithme incrémental de segmentation d'une courbe discrète pour un ordre fixé



Segmentation à l'ordre 2 et à l'ordre 3.



I. DEBLED-RENNESON, J-L. REMY, J. ROUYER-DEGLI

*Linear segmentation of discrete curves into fuzzy segments*, DAM 2005 et IWCIA 2003.

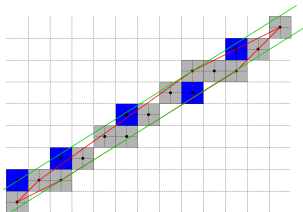
Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

## Approche géométrique

Avec Jocelyne Rouyer-Dégli et Fabien Feschet



$\mathcal{D}(5, 8, -8, 11)$ , droite englobante optimale (ep  $\frac{10}{8} = 1.25$ ) de la suite de points grisés

## Droite englobante optimale

Une **droite englobante**  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  de  $Sf$  est dite **optimale** si son épaisseur verticale est égale à l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de  $Sf$ .

▷ épaisseur verticale de  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  :  $\frac{\omega - 1}{\max(|a|, |b|)}$

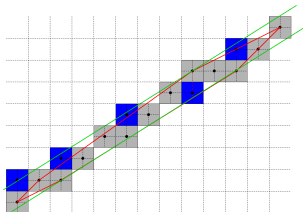
Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

## Approche géométrique

Avec Jocelyne Rouyer-Dégli et Fabien Feschet



La suite de points grisés est un segment flou d'épaisseur 2

### Droite englobante optimale

Une **droite englobante**  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  de  $Sf$  est dite **optimale** si son épaisseur verticale est égale à l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de  $Sf$ .

▷ épaisseur verticale de  $\mathcal{D}(a, b, \mu, \omega)$  :  $\frac{\omega - 1}{\max(|a|, |b|)}$

### Segment flou d'épaisseur $\nu$

$Sf$  est un **segment flou d'épaisseur**  $\nu$  si sa droite optimale englobante a une épaisseur verticale inférieure ou égale à  $\nu$ .



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

## Approche géométrique

Reconnaissance et segmentation

### Segmentation incrémentale et linéaire

- Reconnaissance incrémentale = Calcul de l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de  $S_f$ 
  - ▷ Même principe que le Rotating Calipers (*M.E. Houle et G.T. Toussaint 1988*)
  - ▷ Recherche des positions extrêmes
  - ▷ Calcul incrémental linéaire de l'enveloppe convexe (*A. Melkman 1987*)



I. DEBLE-RENNESON, F. FESCHET, J. ROUYER-DEGLI

*Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time*, CG 2006 et DGCI 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Les segments flous arithmétiques

## Approche géométrique

Reconnaissance et segmentation

### Segmentation incrémentale et linéaire

- Reconnaissance incrémentale = Calcul de l'épaisseur verticale de l'enveloppe convexe de  $S_f$ 
  - ▷ Même principe que le Rotating Calipers (*M.E. Houle et G.T. Toussaint 1988*)
  - ▷ Recherche des positions extrêmes
  - ▷ Calcul incrémental linéaire de l'enveloppe convexe (*A. Melkman 1987*)
- Segmentation incrémentale et linéaire d'une courbe discrète en segments flous pour une épaisseur fixée



I. DEBLE-RENNESON, F. FESCHET, J. ROUYER-DEGLI

*Optimal blurred segments decomposition of noisy shapes in linear time*, CG 2006 et DGCI 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées  
Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments flous d'épaisseur 2

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

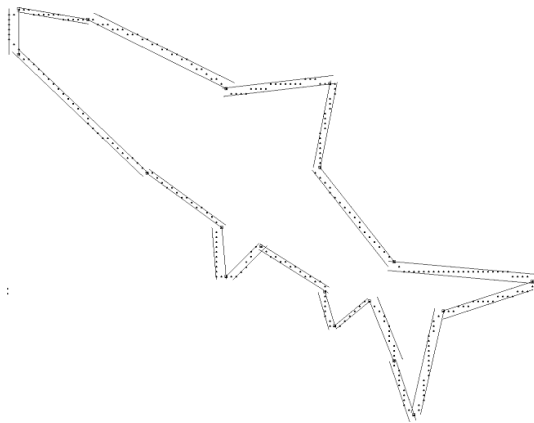
Courbes  
bruitées  
Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments flous d'épaisseur 2

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments flous d'épaisseur 2

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

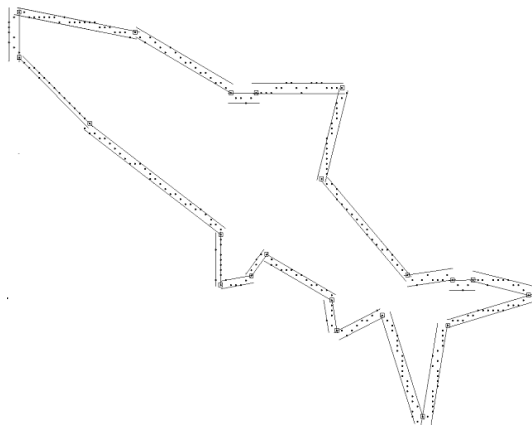
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation de courbes discrètes



Segmentation en segments fous d'épaisseur 2

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Comportement

- Bons résultats pour des courbes faiblement bruitées
- Moins bonnes performances pour des courbes fortement bruitées
  - ▷ Décalage des extrémités des segments
- L'épaisseur doit être fixée avant la segmentation

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

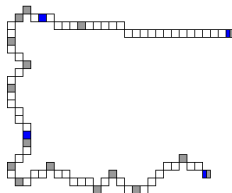
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation de courbes discrètes

Approximation polygonale à partir d'une analyse multi-niveaux des points de contour

Avec Laurent Wendling et Antoine Tabbone



### Hypothèses

- Les extrémités des segments significatifs appartiennent à la liste des points extrémités obtenus à l'épaisseur 1.
- Le nombre significatif de segments est obtenu pour une segmentation à une épaisseur élevée.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

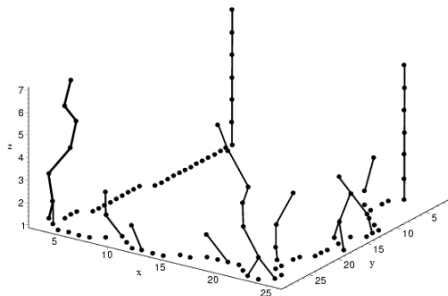
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

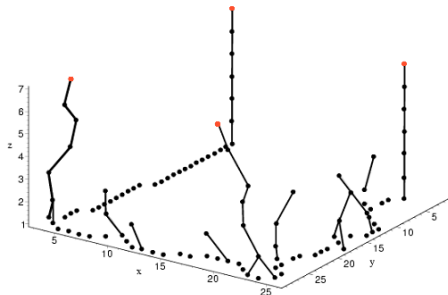
Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

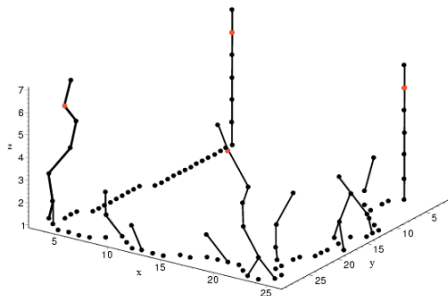
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

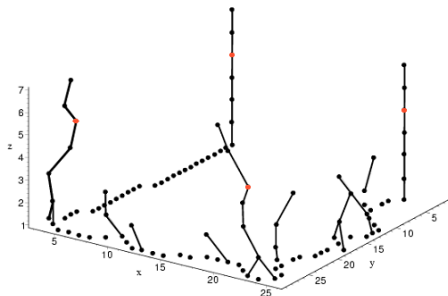
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

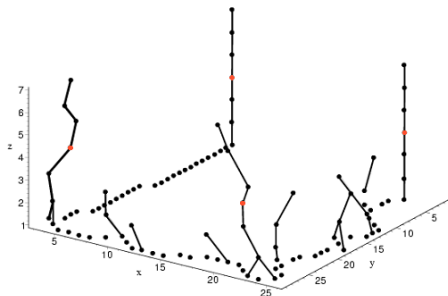
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

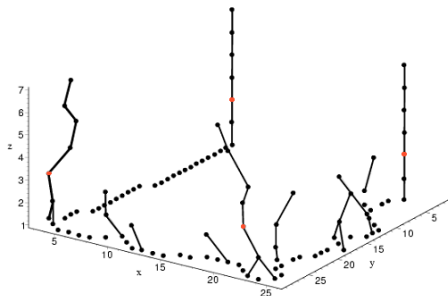
Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

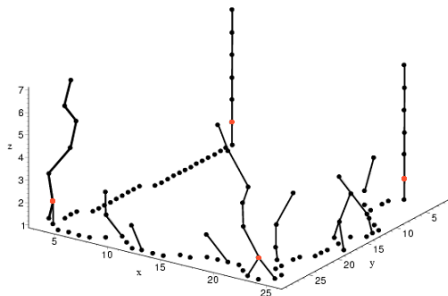
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
**Segmentation**  
Estimateurs

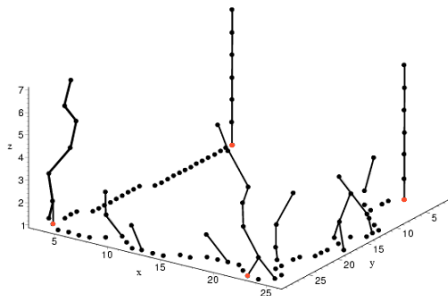
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



I. DEBLE-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
**Segmentation**  
Estimateurs

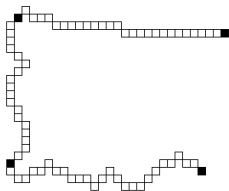
Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation de courbes discrètes

## Analyse multi-niveaux des points de contour



### Bilan

- Segmentation sans paramètre
- Calcul d'erreur associé
- Comparaisons (Wall et Danielson 84)
- Améliorations
  - Gestion du voisinage d'un niveau à l'autre
  - Points de départ et d'arrivée



I. DEBLED-RENNESON, S. TABBONE, L. WENDLING,

*Multiorder polygonal approximation of digital curves*, ELCVIA, 2005.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Estimation de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées

## Utilisation des segments flous arithmétiques

- Tangente discrète d'ordre  $d$ 
  - ▷ Croissance symétrique d'un segment flou d'ordre  $d$
  - ▷ Pour  $d = 1$ , définition d'Anne Vialard (96)



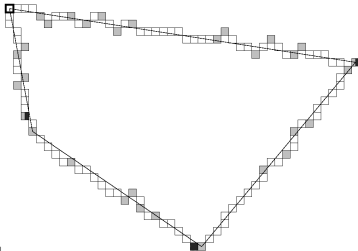
I. DEBLED-RENNESON,

*Estimation of tangents to a noisy discrete curve*, Vision Geometry XII, SPIE, 2004.

# Estimation de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées

## Utilisation des segments flous arithmétiques

- Tangente discrète d'ordre  $d$ 
  - ▷ Croissance symétrique d'un segment flou d'ordre  $d$
  - ▷ Pour  $d = 1$ , définition d'Anne Vialard (96)
- Longueur d'une courbe discrète
  - ▷ Utilisation de l'approximation polygonale de la courbe



I. DEBLE-RENNESON,

*Estimation of tangents to a noisy discrete curve*, Vision Geometry XII, SPIE, 2004.

# Estimation de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées

## Utilisation des segments flous arithmétiques

- Tangente discrète d'ordre  $d$ 
  - ▷ Croissance symétrique d'un segment flou d'ordre  $d$
  - ▷ Pour  $d = 1$ , définition d'Anne Vialard (96)
- Longueur d'une courbe discrète
  - ▷ Utilisation de l'approximation polygonale de la courbe
- Courbure en chaque point d'une courbe discrète
  - ▷ Application à la détection d'arcs et de segments dans les documents techniques



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

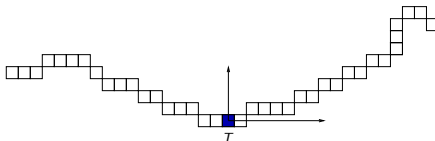
Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Courbure d'épaisseur $\nu$

## Utilisation des segments flous arithmétiques



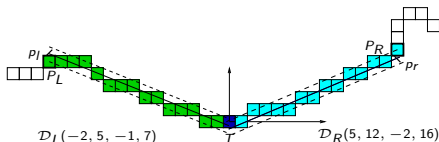
**Principe** (D. Coeurjolly, 02)

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Courbure d'épaisseur $\nu$

## Utilisation des segments fous arithmétiques



Exemple de calcul de courbure d'épaisseur 1.3 au point  $T$

### Principe (D. Coeurjolly, 02)

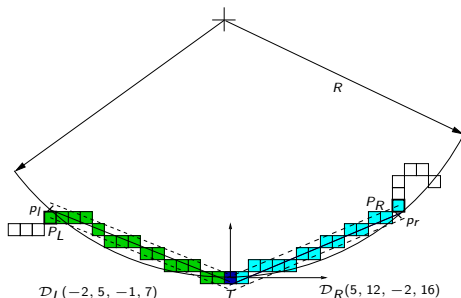
- Calcul des demi-tangentes d'épaisseur  $\nu$  à droite et à gauche de  $T$ 
  - ▷ Droites englobantes  $\mathcal{D}_R$  et  $\mathcal{D}_L \Rightarrow$  points réels  $p_R$  et  $p_L$

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrète  
Reconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Courbure d'épaisseur $\nu$

Utilisation des segments fous arithmétiques



Exemple de calcul de courbure d'épaisseur 1.3 au point  $T$

### Principe (D. Coeurjolly, 02)

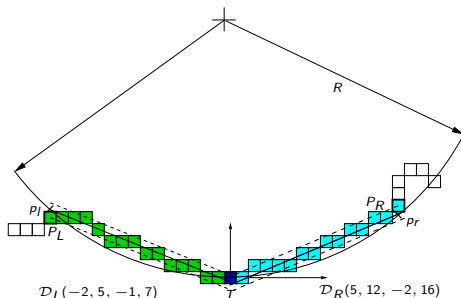
- Calcul des demi-tangentes d'épaisseur  $\nu$  à droite et à gauche de  $T$ 
  - ▷ Droites englobantes  $\mathcal{D}_R$  et  $\mathcal{D}_L \Rightarrow$  points réels  $p_R$  et  $p_L$
- Calcul du cercle circonscrit au triangle  $(p_l, T, p_r)$ 
  - ▷  $C_\nu(T) = \frac{S}{R_\nu(T)}$  avec avec  $S = \text{sign}(\det(\overrightarrow{T p_r}, \overrightarrow{T p_l}))$

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrète  
Reconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discretsCaractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Courbure d'épaisseur $\nu$

### Utilisation des segments fous arithmétiques



Exemple de calcul de courbure d'épaisseur 1.3 au point  $T$

### Principe (D. Coeurjolly, 02)

- Calcul des demi-tangentes d'épaisseur  $\nu$  à droite et à gauche de  $T$

▷ Droites englobantes  $\mathcal{D}_R$  et  $\mathcal{D}_L \Rightarrow$  points réels  $p_R$  et  $p_L$

- Calcul du cercle circonscrit au triangle  $(p_L, T, p_R)$

▷  $C_\nu(T) = \frac{S}{R_\nu(T)}$  avec  $S = \text{sign}(\det(\overrightarrow{T p_R}, \overrightarrow{T p_L}))$

- Calcul de la courbure en chaque point d'une courbe discrète de  $n$  points :  $O(n^2)$



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Courbure d'épaisseur $\nu$

Amélioration du calcul de la courbure en chaque point d'une courbe discrète de  $n$  points

Avec Thanh Phuong Nguyen

### Principe

- Extension de la notion de segment maximal d'une courbe discrète
  - ▷ Segment flou maximal d'épaisseur  $\nu$
  - ▷ Calcul de la suite des segments flous maximaux d'une courbe discrète générale  $C$  pour une épaisseur  $\nu$  fixée

Complexité  $O(n \log^2 n)$  (L. Buzer 05) et (M.H. Overmars, J. van Leeuwen 81)



T.P. NGUYEN, I. DEBLED-RENNESON,

*Curvature estimation in noisy curves*, CAIP, 2007.

## Courbure d'épaisseur $\nu$

Amélioration du calcul de la courbure en chaque point d'une courbe discrète de  $n$  points

Avec Thanh Phuong Nguyen

### Principe

- Extension de la notion de segment maximal d'une courbe discrète
  - ▷ Segment flou maximal d'épaisseur  $\nu$
  - ▷ Calcul de la suite des segments flous maximaux d'une courbe discrète générale  $C$  pour une épaisseur  $\nu$  fixée

Complexité  $O(n \log^2 n)$  (L. Buzer 05) et (M.H. Overmars, J. van Leeuwen 81)

⇒ Points extrémités des demi-tangentes



# Courbure d'épaisseur $\nu$

Amélioration du calcul de la courbure en chaque point d'une courbe discrète de  $n$  points  
Avec Thanh Phuong Nguyen

## Principe

- Extension de la notion de segment maximal d'une courbe discrète
  - ▷ Segment flou maximal d'épaisseur  $\nu$
  - ▷ Calcul de la suite des segments flous maximaux d'une courbe discrète générale  $C$  pour une épaisseur  $\nu$  fixée

Complexité  $O(n \log^2 n)$  (L. Buzer 05) et (M.H. Overmars, J. van Leeuwen 81)

⇒ Points extrémités des demi-tangentes

- Complexité de la méthode en  $O(n \log^2 n)$



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$



J.-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

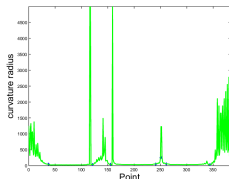
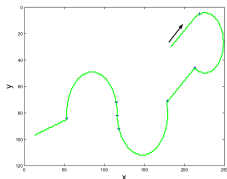
Conclusion

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$
- Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$



J.-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrèteReconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments flous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

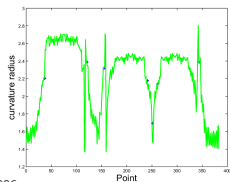
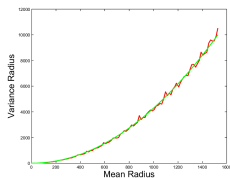
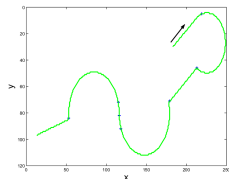
Conclusion

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$
- Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$ 
  - ▷ **Filtre quadratique**



J.-P. SALMON, I. DEBLEDE-RENNESON, L. WENDLING,

*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

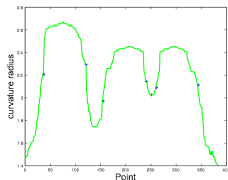
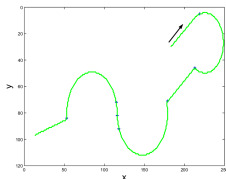
Conclusion

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$
- Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$ 
  - ▷ Filtre quadratique
  - ▷ Filtre médian



J.-P. SALMON, I. DEBLEDE-RENNESON, L. WENDLING,

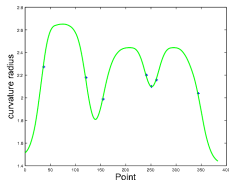
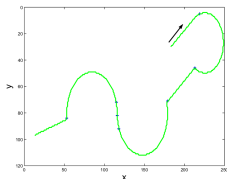
*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$
- Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$ 
  - ▷ Filtre quadratique
  - ▷ Filtre médian
  - ▷ Filtre moyeneur



J.-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

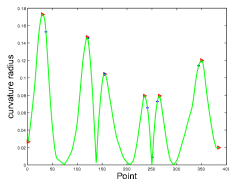
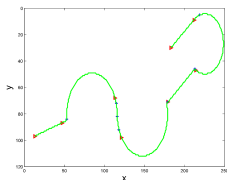


# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$ 
  - Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$ 
    - ▷ Filtre quadratique
    - ▷ Filtre médian
    - ▷ Filtre moyenneur
  - Etape de segmentation du profil obtenu  $\mathcal{P}_\nu^f(C)$ 
    - ▷ Calcul de la valeur absolue du gradient sur  $\mathcal{P}_\nu^f(C)$
    - ▷  $C = \bigcup (C_i)_{i=1, \dots, p}$  avec  $p$  points de rupture



J.-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

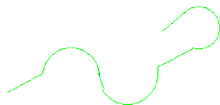
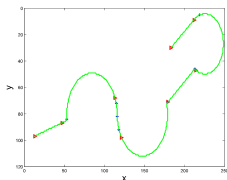
*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

# Détection d'arcs de cercles et de segments dans les documents techniques

Avec J.-P. Salmon et L. Wendling

## Etude des rayons de courbure d'épaisseur $\nu$ de $C$

- $\mathcal{P}_\nu(C)$  : profil des rayons de courbure d'épaisseur  $\nu$  de  $C$
- Application de filtres sur  $\mathcal{P}_\nu(C)$ 
  - ▷ Filtre quadratique
  - ▷ Filtre médian
  - ▷ Filtre moyenneur
- Etape de segmentation du profil obtenu  $\mathcal{P}_\nu^f(C)$ 
  - ▷ Calcul de la valeur absolue du gradient sur  $\mathcal{P}_\nu^f(C)$
  - ▷  $C = \bigcup (C_i)_{i=1, \dots, p}$  avec  $p$  points de rupture
- Etude de chaque  $\mathcal{P}_\nu(C_i)$



J.-P. SALMON, I. DEBLED-RENNESON, L. WENDLING,

*A new method to detect arcs and segments from curvature profiles, ICPR 2006.*

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

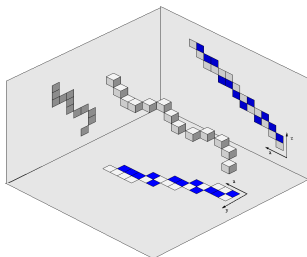
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Extension aux courbes 3D

Avec Franck Rapaport et Thanh Phuong Nguyen

- Segment flou 3D d'épaisseur  $\nu$  (ou d'ordre  $d$ )
  - ▷ Deux projections dans les plans de coordonnées sont des segments flous 2D d'épaisseur  $\nu$  (ou d'ordre  $d$ )



$\mathcal{D}_{3D}(45, 27, 20, -45, -81, 90, 90)$  droite  
englobante des points grisés

## Extension aux courbes 3D

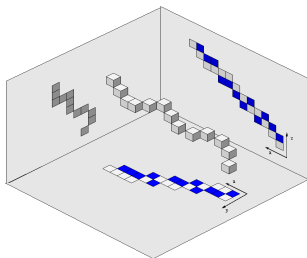
Avec Franck Rapaport et Thanh Phuong Nguyen

### ■ Segment flou 3D d'épaisseur $\nu$ (ou d'ordre $d$ )

- ▷ Deux projections dans les plans de coordonnées sont des segments flous 2D d'épaisseur  $\nu$  (ou d'ordre  $d$ )

### ■ Algorithmes linéaires de reconnaissance

- ▷ Algorithmes de segmentation d'une courbe discrète en segments flous 3D pour une épaisseur (ou un ordre) fixé



$\mathcal{D}_{3D}(45, 27, 20, -45, -81, 90, 90)$  droite englobante des points grisés

## Extension aux courbes 3D

Avec Franck Rapaport et Thanh Phuong Nguyen

### ■ Segment flou 3D d'épaisseur $\nu$ (ou d'ordre $d$ )

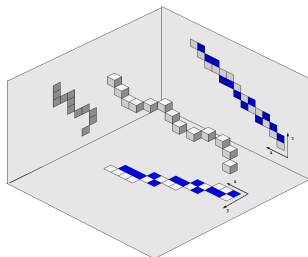
- ▷ Deux projections dans les plans de coordonnées sont des segments flous 2D d'épaisseur  $\nu$  (ou d'ordre  $d$ )

### ■ Algorithmes linéaires de reconnaissance

- ▷ Algorithmes de segmentation d'une courbe discrète en segments flous 3D pour une épaisseur (ou un ordre) fixé

### ■ Paramètres géométriques

- ▷ Longueur
- ▷ Courbure



$\mathcal{D}_{3D}(45, 27, 20, -45, -81, 90, 90)$  droite englobante des points grisés



D. COEURJOLLY, I. DEBLED-RENNESON, O. TEYTAUD,

*Segmentation and length estimation of 3D discrete curves*, Digital and Image Geometry, LNCS 2243, 2000.

## Extension aux courbes 3D

Avec Franck Rapaport et Thanh Phuong Nguyen

### ■ Segment fou 3D d'épaisseur $\nu$ (ou d'ordre $d$ )

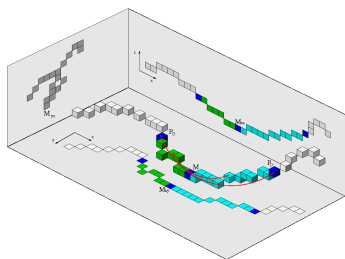
- ▷ Deux projections dans les plans de coordonnées sont des segments fous 2D d'épaisseur  $\nu$  (ou d'ordre  $d$ )

### ■ Algorithmes linéaires de reconnaissance

- ▷ Algorithmes de segmentation d'une courbe discrète en segments fous 3D pour une épaisseur (ou un ordre) fixé

### ■ Paramètres géométriques

- ▷ Longueur
- ▷ Courbure



Rayon de courbure d'ordre 1 et 2 au point  $M$ .



D. COEURJOLLY, I. DEBLED-RENNESON, O. TEYTAUD,

*Segmentation and length estimation of 3D discrete curves*, Digital and Image Geometry, LNCS 2243, 2000.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Courbes discrètes bruitées

Bilan et perspectives

## Bilan

Nouvelle notion : les segments flous arithmétiques

- Paramètre permettant une adaptation au bruit
  - ▷ Contrôle de l'approximation effectuée
- Algorithmes performants
  - ▷ Estimateurs de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées
  - ▷ Applications en traitement d'image et en bioinformatique

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Courbes discrètes bruitées

Bilan et perspectives

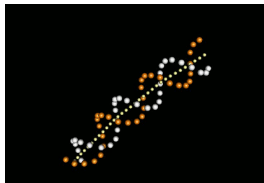
## Bilan

Nouvelle notion : les segments flous arithmétiques

- Paramètre permettant une adaptation au bruit
  - ▷ Contrôle de l'approximation effectuée
- Algorithmes performants
  - ▷ Estimateurs de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées
  - ▷ Applications en traitement d'image et en bioinformatique

```
...AATACCGAATT  
ATTCGGACTATAG  
TACCGAGGATCAT  
AAAAGCAAATCG  
TTTTACGCAATTT  
GGGCCATTACCTA  
CACTGTTTTAGCC  
CGCAAATCGAAT...
```

Séquence d'ADN



Modèle tubulaire (Bolshoy et al, 91)



# Courbes discrètes bruitées

## Bilan et perspectives

### Bilan

Nouvelle notion : les segments flous arithmétiques

- Paramètre permettant une adaptation au bruit
  - ▷ Contrôle de l'approximation effectuée
- Algorithmes performants
  - ▷ Estimateurs de paramètres géométriques sur les courbes discrètes bruitées
  - ▷ Applications en traitement d'image et en bioinformatique

### Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit
- Autres algorithmes de segmentation
  - ▷ Respect des concavités/convexités
- Estimateur de la torsion des courbes discrètes 3D

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Plan

- 1 Structures discrètes régulières
  - Convexité discrète
  - Reconnaissance
  - Paraboles
- 2 Courbes bruitées
  - Segments flous
  - Segmentation
  - Estimateurs
- 3 Surfaces bruitées
  - Morceaux flous de plans discrets
  - Caractéristiques
  - Segmentation
- 4 Conclusion

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces bruitées

Avec Laurent Provot

Etude du bord d'un objet discret 3D 6-connexe

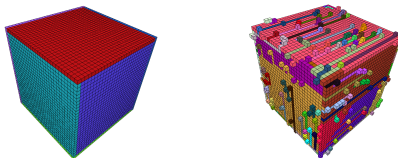
## Travaux antérieurs

- Segmentation en morceaux de plans discrets naïfs ou standards  
(L. Papier, J. Françon 99),(I. Sivignon et al 04), ...
- Polyédrisation  
(D. Coeurjolly et al 06),(M. Dexet et al 06), ...

Utilisation d'algorithmes de reconnaissance des morceaux de plans discrets naïfs ou standards



Comportement non satisfaisant sur les objets bruités



Utilisation de l'algorithme d'I. Sivignon pour la segmentation d'un cube d'arête de 25 voxels

# Morceaux fous de plans discrets

## Définitions

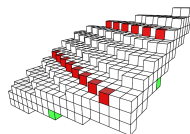
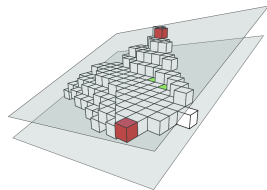
### Plan englobant

$\mathcal{E}$  : un ensemble de points de  $\mathbb{Z}^3$

- **Plan englobant** :  
 $\mathcal{P}(a, b, c, \mu, \omega)$  tel que les points de  $\mathcal{E} \in \mathcal{P}$
- **Épaisseur** :  
(relativement à la distance considérée)

$$\frac{\omega - 1}{\| (a, b, c) \|_i} \quad i = 2, \infty$$

- **Plan englobant optimal** pour  $\mathcal{E}$  : épaisseur minimale



### Morceau fou de plan discret d'épaisseur $\nu$

$\mathcal{E}$  est un **morceau fou de plan discret d'épaisseur  $\nu$**  si son plan englobant optimal a une épaisseur  $\leq \nu$ .

Morceau fou de plan discret d'épaisseur 3  
Plan englobant optimal pour la norme euclidienne :  
 $\mathcal{P}(4, 8, 19, -80, 49)$

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Morceaux flous de plans discrets

Reconnaissance

## Algorithmes de reconnaissance

- ▷  $\| \cdot \|_{\infty}$  : adaptation de l'algorithme du simplexe
- ▷  $\| \cdot \|_2$  : approche géométrique, adaptation incrémentale de l'algorithme de B. Gärtner et T. Herrmann (2001)



L. PROVOT, L. BUZER and I. DEBLED-RENNESON

*Recognition of Blurred Pieces of Discrete Planes*, DGCI 2006.

# Morceaux flous de plans discrets

## Reconnaissance

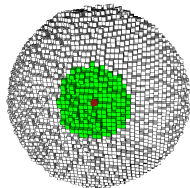
### Algorithmes de reconnaissance

- ▷  $\| \cdot \|_{\infty}$  : adaptation de l'algorithme du simplexe
- ▷  $\| \cdot \|_2$  : approche géométrique, adaptation incrémentale de l'algorithme de B. Gärtner et T. Herrmann (2001)

### Patch d'épaisseur $\nu$

$\mathcal{B}$  le bord d'un objet discret,  $p$  un point de  $\mathcal{B}$ ,

- **Patch d'épaisseur  $\nu$  centré en  $p$  ( $\Gamma_{\nu}(p)$ )**  
Morceau flou de plan discret d'épaisseur  $\nu$   
reconnu incrémentalement à partir du partir  
de  $p$  en ajoutant les points de  $\mathcal{B}$  selon un  
parcours *géodésique*.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

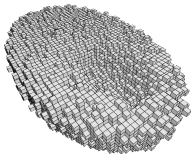
# Caractéristiques géométriques

Normale

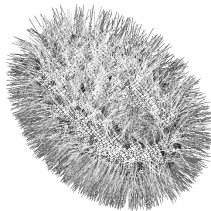
## Normales d'épaisseur $\nu$ à un objet discret

$\mathcal{B}$  le bord d'un objet discret,  $p$  un point de  $\mathcal{B}$ ,

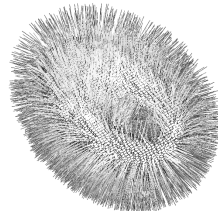
$\vec{n}_\nu(p)$  = normale au patch d'épaisseur  $\nu$  en  $p$



(a)



(b) Épaisseur 1



(c) Épaisseur 3

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

**Caractéristiques**  
Segmentation

Conclusion

# Caractéristiques géométriques

Estimateur de forme au voisinage d'un point

## Principe

Etude des patches du contour de  $\Gamma_\nu(\rho)$



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

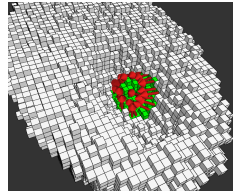
Conclusion

# Caractéristiques géométriques

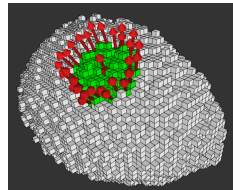
Estimateur de forme au voisinage d'un point

## Principe

Etude des patches du contour de  $\Gamma_\nu(\rho)$



Zone concave



Zone convexe

# Caractéristiques géométriques

Estimateur de forme au voisinage d'un point

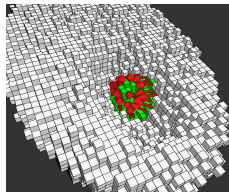
## Principe

Etude des patches du contour de  $\Gamma_\nu(p)$

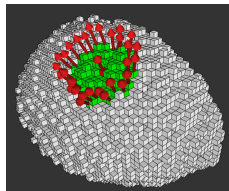
$$\mathcal{F}_\nu(p) = \frac{1}{|C|} \sum_{\forall q \in C} (\widehat{\vec{n}_\nu(p), \vec{n}_\nu(q)}) \cdot \frac{E_A(\Gamma_\nu(q))}{E_A(\Gamma_\nu(p))}$$

avec estimation de l'aire d'un patch (*A. Lenoir, 96*) :

$$E_A(\Gamma_\nu(p)) = \vec{n}_\nu(p) \cdot \sum_{s \in S_{\Gamma_\nu(p)}} \vec{n}_{el}(s)$$



Zone concave



Zone convexe

# Caractéristiques géométriques

Estimateur de forme au voisinage d'un point

## Principe

Etude des patches du contour de  $\Gamma_\nu(p)$

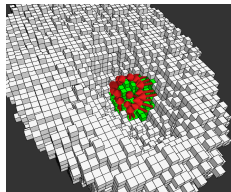
$$\mathcal{F}_\nu(p) = \frac{1}{|C|} \sum_{\forall q \in C} (\widehat{\vec{n}_\nu(p), \vec{n}_\nu(q)}) \cdot \frac{E_A(\Gamma_\nu(q))}{E_A(\Gamma_\nu(p))}$$

avec estimation de l'aire d'un patch (*A. Lenoir, 96*) :

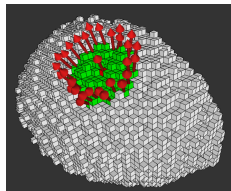
$$E_A(\Gamma_\nu(p)) = \vec{n}_\nu(p) \cdot \sum_{s \in S_{\Gamma_\nu(p)}} \vec{n}_{el}(s)$$

## Interprétation

- ▷  $\mathcal{F}_\nu(p) > 0$ , *localement convexe*
- ▷  $\mathcal{F}_\nu(p) < 0$ , *localement concave*
- ▷  $|\mathcal{F}_\nu(p)|$  élevé  $\Rightarrow$  caractère convexe/concave prononcé



Zone concave



Zone convexe

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Caractéristiques géométriques

Estimateur de forme au voisinage d'un point

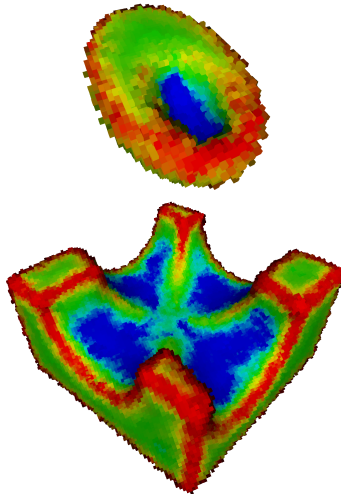
Concave



Plat



Convexe



Estimation des parties concaves (bleu), convexes (orange), plates (vertes) en utilisant les patches d'épaisseur 3 dans le calcul de  $\mathcal{F}_\nu(\rho)$ .

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation en morceaux fous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

**Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet**

Utilisation pour une épaisseur  $\nu$  fixée,

- ▷ d'un algorithme de reconnaissance de morceaux fous de plans discrets,
- ▷ des estimateurs locaux de caractéristiques géométriques.



L. PROVOT, I. DEBLED-RENNESON

*Segmentation of Noisy Discrete Surfaces*, IWCIA 2008.

# Segmentation en morceaux fous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

**Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet**

Utilisation pour une épaisseur  $\nu$  fixée,

- ▷ d'un algorithme de reconnaissance de morceaux fous de plans discrets,
- ▷ des estimateurs locaux de caractéristiques géométriques.

## Stratégie d'extension maximale

- **Graine**  $g$  de chaque morceau choisie telle que l'aire de  $\Gamma_\nu(g)$  soit la plus grande,
- Points  $q$  26-voisins testés et/ou ajoutés au morceau en fonction de la valeur de  $E_{\mathcal{A}}(\Gamma_\nu(q))$
- Morceau en construction homéomorphe à un disque



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

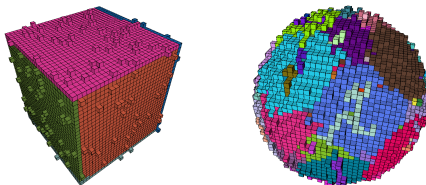
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation en morceaux fous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet



Segmentation d'épaisseur 2

### Stratégie d'extension maximale

- **Graine**  $g$  de chaque morceau choisie telle que l'aire de  $\Gamma_\nu(g)$  soit la plus grande,
- Points  $q$  26-voisins testés et/ou ajoutés au morceau en fonction de la valeur de  $E_A(\Gamma_\nu(q))$
- Morceau en construction homéomorphe à un disque



L. PROVOT, I. DEBLED-RENNESON

*Segmentation of Noisy Discrete Surfaces*, IWICIA 2008.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

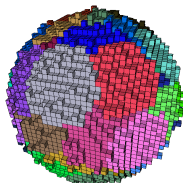
Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation en morceaux flous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet



Segmentation d'épaisseur 2

## Stratégie basée sur les patches d'épaisseur $\nu$

- **Graine**  $g$  de chaque morceau choisie telle que l'aire de  $\Gamma_\nu(g)$  soit la plus grande,
- **Points**  $q$  26-voisins testés et/ou ajoutés au morceau en fonction de la distance au point  $g$ , extension *géodésique*
- Morceau en construction homéomorphe à un disque



L. PROVOT, I. DEBLED-RENNESON

*Segmentation of Noisy Discrete Surfaces*, IWICIA 2008.



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

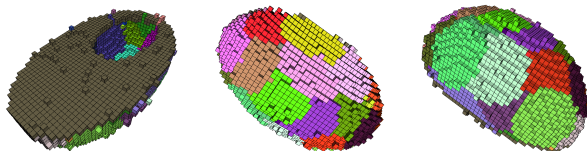
Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

## Segmentation en morceaux fous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet



Segmentation d'épaisseur 2 d'un demi-ellipsoïde

### Stratégie hybride

- **Graine**  $g$  de chaque morceau choisie telle que l'aire de  $\Gamma_\nu(g)$  soit la plus grande,
- Si  $|\mathcal{F}_\nu(g)| < \sigma$ , stratégie d'extension maximale  
Sinon stratégie d'extension basée sur les patches d'épaisseur  $\nu$
- Morceau en construction homéomorphe à un disque



L. PROVOT, I. DEBLED-RENNESON

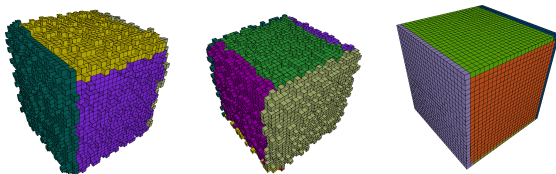
*Segmentation of Noisy Discrete Surfaces*, IWICIA 2008.

Structures  
discrètes  
régulièresConvexité  
discrète  
Reconnaissance  
ParabolesCourbes  
bruitéesSegments fous  
Segmentation  
EstimateursSurfaces  
bruitéesMorceaux fous  
de plans  
discrètes  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Segmentation en morceaux fous de plans discrets d'épaisseur $\nu$

Objectif : Guider la segmentation par des informations géométriques locales sur l'objet



Segmentation d'un cube d'arête 25 pour une épaisseur 3 et 1

## Stratégie hybride

- **Graine**  $g$  de chaque morceau choisie telle que l'aire de  $\Gamma_\nu(g)$  soit la plus grande,
- Si  $|\mathcal{F}_\nu(g)| < \sigma$ , stratégie d'extension maximale  
Sinon stratégie d'extension basée sur les patches d'épaisseur  $\nu$
- Morceau en construction homéomorphe à un disque



L. PROVOT, I. DEBLED-RENNESON

*Segmentation of Noisy Discrete Surfaces*, IWICIA 2008.

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces discrètes bruitées

Bilan et perspectives

## Bilan

Introduction d'une nouvelle notion : les morceaux fous de plans discrets

- ▷ Algorithmes de reconnaissance
- ▷ Estimateurs de paramètres géométriques locaux
- ▷ Stratégies de segmentation du bord d'objets discrets 3D en tenant compte d'informations géométriques locales

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments fous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux fous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces discrètes bruitées

Bilan et perspectives

## Bilan

Introduction d'une nouvelle notion : les morceaux fous de plans discrets

- ▷ Algorithmes de reconnaissance
- ▷ Estimateurs de paramètres géométriques locaux
- ▷ Stratégies de segmentation du bord d'objets discrets 3D en tenant compte d'informations géométriques locales

## Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit

# Surfaces discrètes bruitées

## Bilan et perspectives

### Bilan

Introduction d'une nouvelle notion : les morceaux fous de plans discrets

- ▷ Algorithmes de reconnaissance
- ▷ Estimateurs de paramètres géométriques locaux
- ▷ Stratégies de segmentation du bord d'objets discrets 3D en tenant compte d'informations géométriques locales

### Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit
- Efficacité des algorithmes : adaptation et comparaison avec les algorithmes proposés pour les structures discrètes régulières
  - ▷ reconnaissance des morceaux de plans discrets (ensemble des cordes, espace dual)
  - ▷ normale, courbure

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

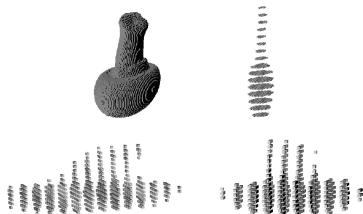
Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces discrètes bruitées

Bilan et perspectives



## Normales discrètes

- Calcul des tangentes 2D sur les contours des coupes de l'objet  
⇒ Normales 3D
- Idée : Utilisation des segments flous arithmétiques 2D



P. TELLIER, I. DEBLED-RENNESON  
*3D discrete normal vectors*, DGCI 1999.

## Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit
- Efficacité des algorithmes : adaptation et comparaison avec les algorithmes proposés pour les structures discrètes régulières
  - ▷ reconnaissance des morceaux de plans discrets (ensemble des cordes, espace dual)
  - ▷ normale, courbure

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces discrètes bruitées

Bilan et perspectives

## Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit
- Efficacité des algorithmes : adaptation et comparaison avec les algorithmes proposés pour les structures discrètes régulières

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Surfaces discrètes bruitées

## Bilan et perspectives

### Perspectives

- Détection automatique du paramètre d'épaisseur le mieux adapté au bruit
- Efficacité des algorithmes : adaptation et comparaison avec les algorithmes proposés pour les structures discrètes régulières
- Etude de la polyédrisation d'objets discrets bruités en contrôlant les approximations effectuées
  - ▷ lissage



Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète  
Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets  
Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Plan

- 1 Structures discrètes régulières
  - Convexité discrète
  - Reconnaissance
  - Paraboles
- 2 Courbes bruitées
  - Segments flous
  - Segmentation
  - Estimateurs
- 3 Surfaces bruitées
  - Morceaux flous de plans discrets
  - Caractéristiques
  - Segmentation
- 4 Conclusion

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Conclusion et perspectives générales

Conclusion

## Etude des structures discrètes régulières

- propriétés arithmétiques, géométriques, combinatoires

⇒ Algorithmes performants

Structures  
discrètes  
régulières

Convexité  
discrète

Reconnaissance  
Paraboles

Courbes  
bruitées

Segments flous  
Segmentation  
Estimateurs

Surfaces  
bruitées

Morceaux flous  
de plans  
discrets

Caractéristiques  
Segmentation

Conclusion

# Conclusion et perspectives générales

## Conclusion

### Etude des structures discrètes régulières

- propriétés arithmétiques, géométriques, combinatoires

⇒ Algorithmes performants

### Objectif : Elaboration d'une géométrie pour les objets discrets bruités

#### Idée centrale

Etudier la structure discrète régulière *encadrant* l'objet discret bruité à étudier

# Conclusion et perspectives générales

## Conclusion

### Elaboration d'une géométrie pour les objets discrets bruités

Etude des courbes et surfaces bruitées selon 3 axes :

- (i) Définitions de primitives géométriques adaptées aux objets discrets bruités
- (ii) Extraction de paramètres géométriques sur les objets discrets bruités
- (iii) Analyse et reconstruction des objets discrets bruités

⇒ Projet blanc de l'ANR : GEODIB (2006-2010)

# Conclusion et perspectives générales

## Perspectives

### (ii) Extraction de paramètres géométriques sur les objets discrets bruités

- Exploration d'autres techniques permettant la reconnaissance de primitives discrètes adaptées aux objets discrets bruités
- Amélioration et enrichissement des estimateurs
- Evaluation du comportement
  - ▷ *Pratique* sur une base d'objets discrets bruités
  - ▷ *Théorique*, convergence asymptotique

⇒ Formalisation des différentes natures de bruit présent dans les données étudiées

# Conclusion et perspectives générales

## Perspectives

### (iii) Analyse et reconstruction des objets discrets bruités

- Amélioration des algorithmes de décomposition de courbes et surfaces discrètes en primitives discrètes
  - ▷ Analyse de l'organisation des primitives *maximales* constituant l'objet discret
  - ▷ Segmentation multi-niveaux
  - ▷ Stratégie de parcours, pré-traitements
- Quelle est la meilleure représentation polyédrique d'un objet discret ?
  - ▷ Nombre minimal de facettes ?
  - ▷ Forme et taille identique des facettes obtenues ?
  - ▷ Bord des facettes appartient à l'objet discret ?
  - ▷ Respect des concavités/convexités de l'objet discret ?

# Conclusion et perspectives générales

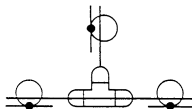
## Perspectives

### Applications

#### Collaborations permettant la validation et la mise à l'épreuve de nos méthodes

#### Analyse de documents graphiques

- Descripteurs robustes de formes



#### Bioinformatique

- Docking des protéines
  - ▷ CPER 2007-2013, axe Modélisation des Biomolécules et de leurs Interactions
  - ▷ Collaborations : action *Modélisation des assemblages protéines-protéines*  
Identification rapide des modes d'assemblage les plus pertinents entre 2 protéines  
⇒ Approche *multirésolution*

